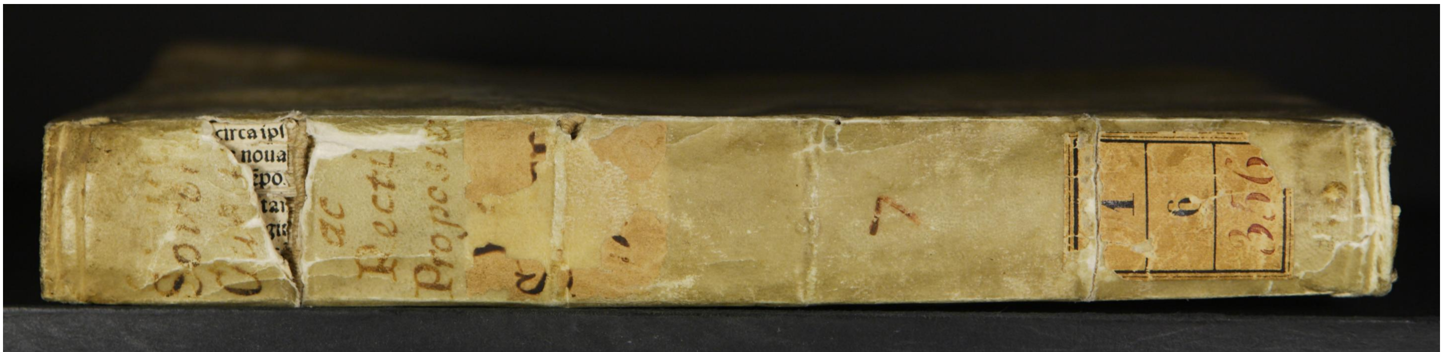








XI
SOVER

CVRVI AC RECTI PROPORTIO

A

BARTHOLOMÆO SOVERO FRIBVRGENSI

In Gymnaſio Patauino Matheſeos Profeſſore promota

LIBRIS SEX.

AD

Illuſtriſ. & Excellentiſ. Viros

NICOLAVM CONTARENVM,
IOHANNEM BAPTISTAM NANI,
DOMINICVM MOLINVM
EIVSDEM
GYMNASII PATAVINI MODERATORES.

PATAVII,
Ex Typographia Variſci Variſci. MDCXXX.

Superiorum permiſſu.

A D

Illuſtriſs. & Excellentiſs. Viros

NICOLAVM CONTARENVM, IOHANNEM BAPTISTAM NANI, DOMINICVM MOLINVM

GYMNASII PATAVINI MODERATORES.

GVLIELMVS SOHIERVS

GALLOBELGA.

STatuerat author, quem præripuit Fatum, hunc vobis librum commendare, hoc eſt, ſplendoris Veſtri acceſſione, ſummoperè ornare. Iam incumbit mihi hoc onus. Non enim præcipuum amici munus, proſequi defunctum ignauo queſtu, ſed quæ voluerit, meminiſſe, quæ mandauerit, exequi. Vos igitur ſubmiſsè rogo, hunc poſthumum veſtri alumni fœtum, &ſi per ignotum ad vos accedat, benignè ſuſcipere, atque veſtra tutela dignari. Hoc decet ſummam veſtram humanitatem; cuius ego laudes præterire, quàm ingenij culpa deterere, malo. Valete:

EPIG. AD LECTOREM
CVM CATASTR.

Ad defuncti AVTORIS manes.

Condit ubi vultus Vasti lustrator, & ævi
Præsul, victorem nox fugat atra suum:
Protenus adparent tenebrarum sidera alumnj,
Et rutila aurati fornicis antra replent.
Non aliter SOVERVS ubi sua subtrahit ora,
Fusca polum velant texta Mathematicum;
Qveis comites, lector genij nova lumina, mundo
Decreta ante obitum, posthuma scripta, vides.
Rara tamen: nec cuncta simùl, conscendere nostras
Ne reliquis desint, sidera jussa, plagas.
Cœtera tempus habet, speratis condita lustris
Omnia in apricum stante trahenda die.
Nunc fruere è multis multo, sed pondere, mole
Charta tumens famæ præmia nulla capit.

Sed Tu, qvi dextram trutinâ suffultus, in omne
Qvantum agis ingenij viribus imperium
Dic mihi, si post Iusta licet, SOVERE, vicêsne
Æquis usque animis intueare novas,
Mortua Te vivo dum cernunt viva sepultum
Et sibi detractum dant Tibi prompta diem?

Sag-

Suggeris, an fallor, composita vita, modesti
Mores, ac liqvido cor adamante madens
Noluit eludi vanâ prurigine mentem,
Sic docuj; ast juvit sic didicisse simul:
Quod sit ea annorum via, & hæc antiqua sepulchri
Lex; Variare novâ tempore freta vice.

F.
Ioh. Iac. Hartig. Lus.



Sic

SIc maris ac terræ vastas emensus abyssos
Ad Superos durâ lege SOVERVS abit?
Sic liquit terras humanis grandior ausis,
Mortales visus jam superasse vias?
Fallor, an exactè Curvis quod Recta quadrasset,
Naturam voluit Parca leuare metu.
Invida quid lucem, famam quid Fata negatis?
Posthuma SOHIERO vindice fama venit.
Hadriaci faveaut modò Numina magna Lycei,
Viuet Opus, genio vivet Vterquè suo.

Vivo quod debebat
post fata desideratiss.
L. S.
Ioan. Rhodius, Danus.

CVR-



BARTHOLOMEVS SOVER
FRIBVRGENSIS IN GYMNASIO PATAVINO
MATHESEOS PVBLICVS PROFESSOR

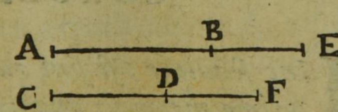
CVRVI AC RECTI Proportio promota.

LIBER PRIMVS.

THEOREMA I. PROPOS. I.

SI duabus quantitatibus inæqualibus æquales quantitates addantur, aut minor maiori; maior erit ratio maioris ad minorem, quam maioris cum addito, ad minorem cum addito.

SINT duæ quantitates inæquales AB. maior, CD. minor, quibus addantur quantitates æquales BE. DF. Dico maiorem esse rationem AB. ad CD.



quam AE. ad CF. Cum enim maior sit AB. quam CD. maior erit ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. & componendo ac permutando, maior erit ratio totius AE. ad totam CF. quam partis BE. ad partem DF. Quare & reliqui AB. ad reliquum CD. maior erit ratio quam totius AE. ad totam CF. Quod demostrare oportuit.

8. 5.

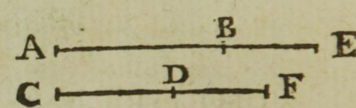
33. 5.

Eandem demonstrationem fieri certum est, si BE. statuatur minor quam DF.

THEOREMA II. PROPOS. II.

SI ex duabus quantitatibus inæqualibus æquales quantitates demantur, aut minor ex maiori; minor erit ratio maioris ad minorem, quam reſidui primæ quantitatis ad reſiduum ſecundæ.

Statuatur AE. prima quantitas maior, & CF. ſecunda minor, & ex AE. auferatur BE. æqualis ablatę DF. ex CF. Dico minorem eſſe rationem AE. ad CF. quam AB. ad CD. Cum enim maior ſit AE. quam CF. maior erit ratio AE. ad BE. quam CF. ad DF. & permutando maior ratio totius AE. ad totum CF. quam partis BE. ad partim D.F. Quare reliqui AB. ad reliquum CD. maior erit ratio quam totius AE. ad totum CF. ideoque minor ratio maioris AE. ad minorem CF. quam reſidui AB. ad reſiduum CD. Quod erat demonſtrandum.



8. 5.

33.5.

Idem ſequetur ſi BE. ſit minor quam DF.

COROLLARIVM.

HInc ſequitur, ſi ſint quatuor magnitudines, quarum prima maior ſit quam ſecunda & tertia, & ſecunda maior quam quarta, ſuperetque prima ſecundam eodem aut minori exceſſu, quo tertia quartam; primæ ad ſecundam minor erit ratio, quam tertiæ ad quartam. Si enim prima quantitas ſtatuatur AE. ſecunda AB. tertia CF. quarta CD. ſitque differentia primæ, & ſecundæ BE. æqualis differentiæ tertiæ, & quartæ DF. aut etiam minor, erit ex demonſtratis minor ratio AE. ad CF. quam AB. ad CD. & permutando minor ratio AE. primæ, ad AB. ſecundam, quam CF. tertiæ, ad CD. quartam.

THEO-

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem habuerit, quam tertia ad quartam, ac inter primam & ſecundam, itemque inter tertiam & quartam mediæ proportionales ſint quinta, & ſexta; erit primæ ad quintam maior ratio, quam tertiæ ad ſextam.

SIT primæ quantitatis A. ad ſecundam B. maior ratio quam tertiæ C. ad quartam D. & inter A. B. ſtatuatur media proportionalis E. & inter C. D. media item proportionalis F. Dico maiorem eſſe rationem A. ad E. quam C. ad F. Si enim non eſt maior, ſit vel æqualis, vel minor; Ac ſit primum æqualis, ita vt ſit A. ad E. ſicut C. ad F. eſt autem vt A. ad E. ita E. ad B. ergo vt E. ad B. ita C. ad F. ſed vt C. ad F. ita ponitur F. ad D. vt igitur E. ad B. ita F. ad D. cum



igitur ponatur A. ad E. ſicut C. ad F. atque hinc ſequatur eſſe E. ad B. vt F. ad D. erit ex æqualitate vt A. ad B. ita C. ad D. Quod eſt abſurdum, ponitur enim ratio A. ad B. maior quam C. ad D. Sed dicatur ratio A. ad E. minor quam ratio C. ad F. Quoniam minor eſt ratio A. ad E. quam C. ad F. & vt A. ad E. mediam proportionalem, ita E. ad B. erit minor ratio E. ad B. quam C. ad F. Sed vt C. ad F. mediam proportionalem, ita F. ad D. igitur minor erit ratio E. ad B. quam F. ad D. Cum igitur minor ponatur ratio A. ad E. quam C. ad F. & ſequatur minor proportio E. ad B. quam F. ad D. erit ex æqualitate minor ratio A. ad B. quam C. ad D. Quod eſt abſurdum, poſita enim eſt maior. Igitur cum

31.5.

31.5.

ratio dicta neque ſit æqualis, neque minor, erit maior. Quod demoſtrare oportebat.

COROLLARIVM.

Eodem prorſus modo demonſtrabitur, ſi prima ad ſecundam minorem rationem habuerit quam tertia ad quartam ac inter primam ac ſecundam ſumatur media proportionalis quinta, & inter tertiam, & quartam ſexta, erit primæ ad quintam minor ratio, quam tertiæ ad ſextam. Si enim ſtatuantur C. prima D. ſecunda A. tertia B. quarta F. quinta E. ſexta eodem prorſus modo ſequetur maiorem eſſe rationem A. ad E. quam C. ad F. ideoque minorem C. ad F. quam A. ad E.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI prima quantitas ad ſecundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam, fueritque prima maior quam tertia, & primæ ac tertiæ eadem quantitas addatur, vel primæ minor quam tertiæ; minor erit ratio primæ cum addita ad ſecundam, quam tertiæ cum addita ad quartam.

HABEAT prima quantitas AB. ad ſecundam C. minorem rationem quam tertia DE. ad quartam F. ſitq; AB. maior quam DE. & ad primam AB. ac tertiam DE. addantur æquales BG. EH. Dico minorem eſſe rationem AG. ad C. quam DH. ad F. Cum enim maior ſit AB. quam DE. maior erit ratio AB. ad BG. quam DE. ad EH. & componendo, maior erit ratio AG. ad BG. quam DH. ad EH.



8. 5.
28. 5.

EH. & per conuerſionem rationis, minor ratio AG. ad AB. quam DH. ad DE. ſed minor etiam ponitur ratio AB. ad C. quam DE. ad F. ergo ex æqualitate minor eſt ratio AG. ad C. quam DH. ad F. Quod erat probandum

30.5.

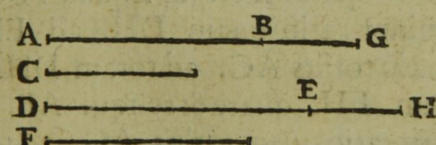
31.5.

Eodem modo probatur, ſi primum additum BG. ponatur minus quam ſecundum EH. multo minorem eſſe rationem AG. ad. C. quam DH. ad F.

THEOREMA V. PROPOS. V.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem quàm tertia ad quartam, ſitque prima minor tertia, ac primæ, & tertiæ eadem quantitas addatur, vel primæ maior quam tertiæ erit ratio primæ cum addita ad ſecundam maior, quam tertiæ cum addita ad quartam.

SIT primæ quantitatis AB. ad ſecundam. C. maior ratio quam tertiæ DE. ad quartam F. ſitque AB. minor quam DE. & primæ ac tertiæ addantur æquales BG. EH. Dico maiorem eſſe rationem AG. ad. C. quã DH. ad F. cum. n. AB. ſit minor quam DE. minor erit ratio AB. ad BG. quam DE. ad EH. & componendo, & per conuerſionem rationis, maior erit ratio AG. ad AB. quam DH. ad DE. ſed etiam ponitur maior ratio AB. ad C. quam DE. ad F. igitur ex æqualitate maior eſt ratio AG. ad C. quam DH. ad F. Quod erat demoſtrandum.



8.5.
28.5.
35.5.

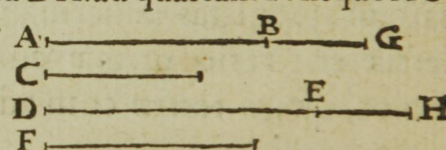
31.5.

Idem aperte ſequitur ſi primum additum BG. ſit maius quam ſecundum. EH.

THEOREMA VI. PREPOS. VI.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam minorem rationem quam tertia ad quartam, ſitque prima minor tertia, ac ex prima, & tertia eadem quantitas dematur, aut ex prima maior quam ex tertia; minor erit ratio reſidui primæ quantitatis ad ſecundam, quam reſidui tertiæ ad quartam.

HABEAT prima quantitas AG. ad ſecundam. C. minorem rationem quam tertia DH. ad quartam F. ſitque AG. minor quam DH. & ex prima ac tertia demantur æquales BG. EH. Dico minorem eſſe rationem reſidui AB. ad ſecundam. C.



quam reſidui DE. ad quartam F. Quoniam minor eſt AG. quam DH. & æquales BG. EH. erit AG. ad BG. minor ratio quam DH. ad EH. & permutando minor ratio totius AG. ad totam DH. quam partis BG. ad partem EH. quare & reliqui AB. ad reliquum DE. minor erit ratio quam totius AG. ad totum DH. & permutando minor erit ratio AB. ad AG. quam DE. ad DH. ſed etiam minor eſt poſita ratio AG. ad. C. quam DH. ad F. igitur ex æqualitate, minor erit ratio primi reſidui AB. ad ſecundam quantitatem. C. quam ſecundi reſidui. DE. ad quartam. F. Quod demonſtrare oportebat.

8.5. 27.5. 33.5. 27.5. 31.5.

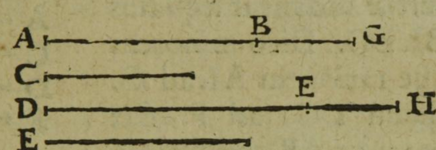
Eadem demonſtrationis ratione ſequitur, minorem eſſe rationem AB. ad C. quam DE. ad F. ſi detracta pars BG. ponatur maior, quam detracta EH.

THEO.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem quam tertia ad quartam, ſitque prima maior tertia, atque ex prima, & tertia æqualis quantitas dematur, aut ex prima minor, quam ex tertia; maior erit ratio reſidui primæ quantitatis ad ſecundam, quam reſidui tertiæ ad quartam.

PRIMA quantitas AG. ad ſecundam. C. maiorem habeat rationem quam tertia DH. ad quartam F. ſitque AG. maior quam DH. & ex prima, & tertia auferantur æquales BG. EH. Dico maiorem eſſe rationem reſidui AB. ad ſecundam. C. quam reſidui DE. ad quartam F. Quoniam maior eſt AG. quam DH. & æquales ſunt BG. EH. habebit AG. ad BG. maiorem rationem quam DH. ad EH. & permutando, maior erit ratio totius AG. ad totum DH. quam partis BG. ad partem EH. quare, & reliqui AB. ad reliquum DE. maior eſt ratio quam totius AG. ad totum DH. & permutando maior eſt ratio AB. ad AG. quam DE. ad DH. ſed etiam maior eſt poſita ratio AG. ad. C. quam DH. ad F. igitur ex æqualitate maior erit ratio primi reſidui AB. ad ſecundam quantitatem. C. quam ſecundi reſidui DE. ad quartam F. Quod oſtendere oportebat.



8.5.
27.5.
33.5.
33.5.
31.5.

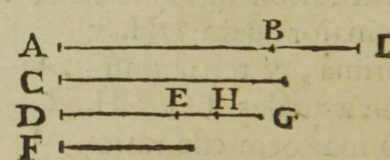
Eodem modo maior fiet ratio reſidui AB. ad reſiduum. C. quam reſidui DE. ad reſiduum F. ſi BG. ſtatuatur minor quam EH.

THEO-

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI fuerit vt prima quantitas ad ſecundam ita tertia ad quartam, ſitque prima maior tertia, ac primæ ac tertiæ eadem quantitas addatur, aut primæ minor quam tertiæ; minor erit ratio primæ cum addita ad ſecundam, quam tertiæ cum addita ad quartam.

HABEAT prima quantitas AB. ad ſecundam. C. eandem rationem quam tertia DE. ad quartam F. ſitque AB. maior quam DE. & primę ac tertiæ addantur æquales BI. EG. Dico minorem eſſe rationem AI. ad C. quam DG. ad F. fiat enim vt AB. ad DE. ita



14.5. BI. ad EH. cum AB. ſit maior quam DE. erit BI. id eſt EG. maior quam EH. Quare cum ſit vt AB. ad DE. ita BI. ad EH. erit permutando, componendo, & per conuerſionem rationis vt IA. ad AB. ita HD. ad DE. ſed vt AB. ad. C. ita eſt DE. ad F. ex hypotheſi eſt ergo, ex æqualitate vt

8.5. AI. ad C. ita DH. ad F. minor autem eſt ratio DH. ad F.

13.5. quam DG. ad F. minor igitur etiam eſt ratio AI. ad. C. quam DG. ad F. Quod erat oſtendendum.

Idem etiam aperte ſequitur ſi BI. ponatur minor quam EG. vt ex modo demonſtrandi conſtat.

COROLLARIVM.

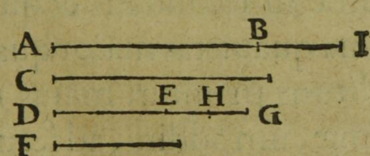
EOdem modo oſtenditur, ſi ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, ſitque prima minor tertia, ac prima & tertiæ eadem quantitas addatur, aut primæ maior;

ior; maior erit ratio primæ cum addita ad ſecundam, quam tertiæ cum addita ad quartam. Nam ſi DE. ſtatuatur prima, F. ſecunda, AB. tertia. C. quarta, & addantur BI. EG. aut æquales, aut EG. maior, ſequetur eodem modo minorem eſſe rationem AI. ad C. quam DG. ad F. ideoque maiorem eſſe rationem DG. ad F. quam AI. ad C.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI fuerit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, ſitque prima maior tertia, atque ex prima & tertia eadem quantitas dematur, aut ex prima minor, quam ex tertia; maior erit ratio primi reſidui ad ſecundam quantitatem, quam ſecundi ad quartam.

HABEAT prima quantitas AI. ad ſecundam C. eandem rationem, quam tertia DG. ad quartam F. ſitque AI. maior quam DG. & ex prima ac tertia demantur æquales BI. EH. Dico maiorem eſſe rationem primi reſidui AB. ad ſecundam quantitatem C. quam



ſecundi reſidui DE. ad quartam quantitatem. F. Fiat enim vt AI. ad DG. ita BI. ad HG. erit HG. minor quàm BI. id eſt quam EG. Quoniam igitur eſt, vt totum AI. ad totum DG. ita pars BI. ad partem HG. erit reliquum AB. ad reliquum DH. vt totum AI. ad totum DG. & permutando, vt AB. ad AI. ita DH. ad DG. ſed vt AI. ad C. ita DG. ad F. ergo ex æqualitate, vt AB. ad C. ita DH. ad F. ſed DH. ad F. maiorem habet rationem quam DE. ad F. Igitur primum reſiduum AB. ad C. maiorem habet rationem, quam ſecundum DE. ad F. Quod &c. Idem prorſus concluditur ſi BI. ponatur minor quam EG.

14.5.

33.5.

CONSECTARIVM.

Eodem prorſus modo demonſtratur, ſi ſit prima quantitas ad ſecundam, vt tertia ad quartam; ſitque prima minor tertia, ac ex prima & tertia eadem quantitas auferatur, aut ex prima minor; minor erit ratio primi reſidui ad ſecundam quantitatem, quam ſecundi ad quartam. Nam ſi DG. ſtatuatur prima. F. ſecunda. AI. tertia, & C. quarta, & auferantur ex BI. EG. aut æquales, aut BI. minor; ſequetur eodem modo maiorem eſſe rationem AB. ad C. quam DE. ad F. ideoque minorem rationem DE. ad F. quam AB. ad C.

THEOREMA X. PROPOS. X.

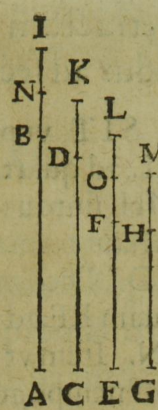
SI ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, quibus ſingulæ quantitates addantur, ita vt additæ ad primam & tertiam, item additæ ad ſecundam & quartam ſint æquales, ſitque prima quantitas maior quam ſecunda, & tertia, atque additum primum maius ſecundo; minor erit ratio primæ cum addita, ad ſecundam cum addita, quam tertiæ cum addita, ad quartam cum addita.

SIT vt prima quantitas AB. ad ſecundam CD. ita tertia EF. ad quartam GH. quibus ordine addantur IB. KD. LF. MH. ſintque IB. LF. item KD. MH. inter ſe æquales, AB. autem maior quam CD. aut EF. & BI. maius quam DK. Dico minorem eſſe rationem AI. ad CK. quam EL. ad GM. Fiat vt CD. ad AB. ita DK. ad BN. Item vt GH. ad EF. id eſt CD. ad AB. (minor ad maiorem) ita HM. ad FO. erit BN. minor quam BI. & FO. minor quam FL. Igitur erit vt DK. ad BN. ita HM. id eſt DK. ad FO. æquales ergo ſunt FO. BN. quæ ſi demantur ex æqualibus FL. BI. remanent

14.5.
11.5.
9.5.

æqua-

æquales OL.NI. Cum igitur ſit vt AB. ad CD. ita BN. ad DK. erit vt AB. ad CD. ita AN. ad CK. & quia eſt ex conſtructione vt EF. ad GH. ita FO. ad MH. erit vt EO. ad GM. ita EF. ad GH. id eſt, AB. ad CD. erit ergo vt AN. ad CK. ita EO. ad GM. Quare cum primæ AN. & tertiæ EO. additæ ſint æquales. NI. OL. ſitque prima maior quam tertia, erit per octauam propoſitionem huius, minor ratio AI. ad CK. quam EL. ad GM. Quod erat demonſtrandum.



12.5.
12.5.
11.5.
8. huius.

COROLLARIVM.

Eodem modo oſtendetur, ſi ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam; quibus ſingulæ quantitates addantur, ita vt additæ ad primam & tertiam, item additæ ad ſecundam & quartam ſint æquales, & ſit prima quantitas maior quam ſecunda, ſed minor quam tertia, & primum additum maius ſecundo, maior erit ratio primæ cum addita ad ſecundam cum addita, quam tertiæ cum addita, ad quartam cum addita. In ſuperiori figura ſtatuatur EF. prima, GH. ſecunda, AB. tertia, CD. quarta, ſi reliqua omnia fiant, vt in ſuperiori iuſſum eſt, inueniemus minorem eſſe rationem AI. ad CK. quam EL. ad GM. ideoque maiorem eſſe rationem EL. primæ cum addita, ad GM. ſecundam cum addita quam AI. tertiæ cum addita, ad CK. quartam cum addita.

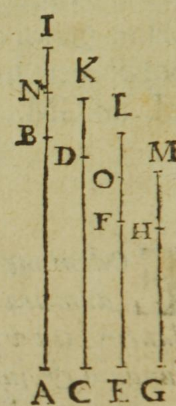
THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, ex quibus ſingulæ quantitates demantur, ita vt ſubtractæ ex prima & tertia, item ex ſecunda & quarta ſint æquales; & ſit prima quantitas maior quam ſecunda ac tertia, primumque

detractum maius ſecundo; maior erit ratio primi reſidui ad ſecundum quam tertij ad quartum.

SIT vt prima quantitas AI. ad ſecundam CK. ita tertia EL. ad quartam GM. ex quibus ordine demantur IB. KD. LF. MH. ſintque IB. LF. æquales, item KD. MH. inter ſe æquales, AI. autem maior quam CK. aut EL. & IB. quam KD. Dico maiorem eſſe rationem AB. ad CD. quam EF. ad GH. Fiat vt CK. ad AI. ita DK. ad IN. Item vt GM. ad EL. id eſt, CK. ad AI. (minor nempe ad maiorem) ita H. M. ad OL. erit IN. minor quam BI. & OL. minor quam FL. Igitur erit vt DK. ad IN. ita, HM. id eſt DK. ad OL. æquales ergo ſunt OL. IN. quæ ſi demantur ex æqualibus FL. BI. remanent etiam æquales OF. BN. Cum igitur ſit vt AI. ad CK. ita NI. ad KD. erit & reſiduum AN. ad reſiduum CD. vt totum AI. ad totum CK. Et quia eſt etiam vt EL. ad GM. ita OL. ad MH. erit reſidui EO. ad reſiduum GH. vt totum EL. ad totum GM. id eſt, vt AI. ad CK. Igitur erit vt AN. ad CD. ita EO. ad GH. Rurſus ex AN. prima & EL. tertia demptis æqualibus BN. FO. erit, per nonam huius, maior ratio AB. ad CD. quam EF. ad GH. Quod fuerat demonſtrandum.

14.5. 11.5. 9.5. 19.5. 11.5. 9. huius.



COROLLARIVM.

Non aliter oſtendetur, ſi ſit vt prima quantitas ad ſecundam ita tertia ad quartam, ex quibus ſingulæ quantitates demantur, ita vt ſubtractæ ex prima & tertia, item ex ſecunda & quarta ſint æquales, & ſit prima quantitas maior quam ſecunda, ſed minor quam tertia; ac primum detractum maius ſecundo; minor erit ratio primi reſidui ad ſecundum, quam tertij ad quartum. Hoc probabimus ratione ſimili qua vſi ſumus in ſuperioribus corollarijs, ſi EL. ſtatuatur prima quantitas, GM. ſecunda AI. tertia CK. quarta. Nam ſi reliqua fiant, vt in propoſitione dictum

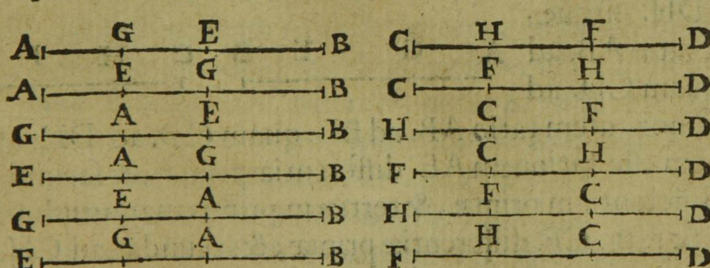
eſt,

eſt, inueniemus maiorem eſſe rationem AB. ad CD. quam EF. ad GH. ideoque minorem eſſe proportionem EF. ad GH. quam AB. ad CD.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI fuerint quatuor magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ ſe ſe eodem ordine ſuperent, ſitque primæ ad ſecundam in primis magnitudinibus maior ratio, quam primæ ad ſecundam in ſecundis, & tertia ad quartam minorem habeat rationem in primis, quam in ſecundis, ſitque tertia magnitudo differentia, aut aggregatum primæ & ſecundæ; minor erit ratio ſecundæ ad quartam in primis, quam in ſecundis magnitudinibus.

SINT quatuor magnitudines priores BA. AG. BG. GE. & quatuor poſteriores DC. CH. DH. HF. quæ ſeſe eodem ordine ſuperent, ſitque maior ratio BA. ad AG. quam DC. ad



CH. minor autem BG. ad GE. quam DH. ad HF. ſitque GB. differentia ipſarum BA. AG. (vt in prima, ſecunda & quarta ſerie) aut earundem aggregatum, vt in reliquis. Dico minorem eſſe rationem AG. ad GE. quam CH. ad HF. Cum enim ſit maior ratio BA. ad AG. quam DC. ad CH. erit in prima, ſecunda & quarta ſerie, diuidendo, & conuertendo, in reliquis componendo, & conuertendo, minor ratio AG. ad GB.

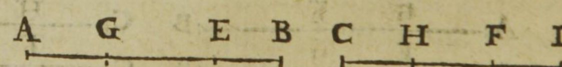
quam

quam CH. ad HD. sed GB. ad GE. etiam minor ratio posita est, quam HD. ad HF. igitur ex æqualitate, minor erit ratio AG. ad GE. quam CH. ad HF. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ sese eodem ordine superent, sitque primæ priorum ad secundam maior ratio, quam primæ posteriorum ad secundam; primæ autem priorum ad tertiam minor ratio, quam primæ posteriorum ad tertiam, sitque prima maior quam secunda, & tertia; maior erit ratio differentiæ primæ, & secundæ, ad differentiam primæ, & tertiæ in prioribus magnitudinibus, quam in posterioribus.

SINT tres magnitudines AB. BE. BG. priores, & tres CD. DF. DH. posteriores, sitque tam prima priorum AB. maior ipsis BE. BG. quam CD. prima posteriorum maior ipsis DF. DH. sitque maior ratio AB. ad BE. quam CD. ad



DF. minor autem ratio AB. ad BG. quam CD. ad DH. Dico maiorem esse rationem AE. differentiæ primæ, & secundæ, ad AG. differentiam primæ, & tertiæ in primis magnitudinibus, quam sit ratio CF. differentiæ primæ, & secundæ, ad CH. differentiam primæ, & tertiæ in secundis magnitudinibus. Quoniam maior est ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. & permutando maior ratio totius AB. ad totum CD. quam partis EB. ad partem FD. maior etiam erit ratio residui AE. ad residuum CF. quam totius AB. ad totum CD. & permutando maior ratio AE. ad AB. quam CF. ad CD. Eodem modo cum minor sit ratio AB. ad BG. quam CD. ad DH. & permutando minor ratio totius AB. ad totum CD. quam partis GD. ad partem HD.

HD. erit & residui AG. ad residuum CH. minor ratio quam totius AB. ad totum CD. & permutando ac conuertendo maior ratio AB. ad AG. quam CD. ad DH. Cum igitur maior sit ratio AE. ad AB. quam CF. ad CD. & maior ratio AB. ad AG. quam CD. ad DH. erit ex æqualitate maior ratio AE. ad AG. quam CF. ad CH. Quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc etiam aperte ostenditur, minorem esse rationem differentiæ primæ, & secundæ magnitudinis, ad differentiam secundæ, & tertiæ in primis magnitudinibus, quam in secundis: videlicet minorem esse rationem AE. ad EG. quam CF. ad FH. cum enim ostensum sit maiorem esse rationem AE. ad AG. quam CF. ad CH. erit per conuersionem rationis minor ratio AE. ad EG. quam CF. ad FH.

COROLLARIVM II.

Præterea sequitur minorem esse rationem secundæ magnitudinis, ad differentiam secundæ, & tertiæ in primis magnitudinibus, quam in secundis: videlicet minorem esse rationem EB. ad EG. quam FD. ad FH. Nam cum posita sit ratio AB. ad BE. maior quam CD. ad DF. erit per conuersionem rationis, & diuidendo minor ratio BE. ad EA. quam FD. ad CF. sed AE. ad EG. (ex precedenti Corellario) minorem habet rationem quam CF. ad FH. Igitur ex æquali, BE. ad EG. minorem habet rationem, quam DF. ad FH.

COROLLARIVM III.

Constat etiam maiorem esse rationem, AB. primæ quantitatis, ad GE. differentiam secundæ, & tertiæ, quam CD. ad HF. cum enim in superiori Corollario ostensum sit minorem esse rationem BE. ad GE. quam DF. ad FH. erit componendo, minor ratio

BG. ad GE. quam DH. ad HF. Et rurſus cum ſit minor ratio AB. ad BG. quàm CD. ad DH. erit ex æquali minor ratio AB. ad GE. quam CD. ad HF.

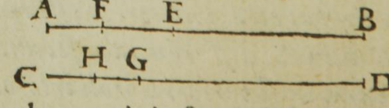
SCHOLIVM.

QVod ſi propoſito primæ ad ſecuudam fuerit minor in primo ordine quàm in ſecundo, & primæ ad tertiam maior, in primo quam in ſecundo, hinc etiam in conclusionibus ſeu demonſtrationibus, verſa maiori proportione in minorem, omnia eo modo ſequentur, quo in propoſitione: vt ſi minor fuerit ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. maior autem AB. ad BG. quam CD. ad DH. ſequetur, vt in propoſitione, minorem eſſe rationem AE. ad AG. quàm CF. ad CH. in primo Corollario, minorem rationem AE. ad EG. quam CF. ad FH. In ſecundo, maiorem eſſe rationem BE. ad EG. quam DF. ad FH. in tertio denique maiorem rationem AB. ad GE. quam CD. ad HF.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI ex prima quantitate, quæ æqualis ſit ſecundæ aut minor, auferantur tertia & quarta, & ex ſecunda, quinta & ſexta, ſitque tertia maior quam quarta & quinta, & quinta quam ſexta, & differentia tertiæ & quartæ aut maior aut æqualis differentiæ quintæ & ſextæ; maior erit ratio complementi quartæ ad complementum tertiæ, quam complementi ſextæ, ad complementum quintæ.

SINT duæ quantiates æquales, prima AB. ſecunda CD. ex prima auferantur AE. tertia, & AF. quarta; Item ex CD. ſecunda demantur CG. quinta & CH. ſexta, ſitque AE. ipſa CG. maior, & differentia FE. maior, aut æqualis differentiæ HG. Dico maiorem eſſe rationem FB. complementi ipſius AF. ad EB.



com-

complementum ipſius AE. quam HD. complementi ipſius CH. ad GD. complementum ipſius CG. Quoniam enim ex æqualibus quantitatibus, AB. CD. inæquales demptæ ſunt AE. maior CG. minor, ſupereſt EB. minor, GD. maior. Igitur minor eſt ratio BE. ad EF. quam BE. ad GH. & BE. ad GH. minor quam DG. ad GH. Igitur minor eſt ratio BE. ad EF. quam DG. ad GH. & componendo, ac per conuerſionem rationis, maior eſt ratio FB. ad BE. quam HD. ad DG.

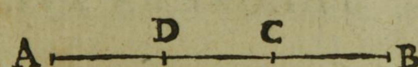
5. axioma. 8.5. 8.5.

Idem etiam ſequetur, ſi FE. & HG. ponantur æquales, aut AB. minor quam CD. Quod euidentius eſt quam vt probatione indigeat.

LEMMA.

SI ſint tres magnitudines continue proportionales; habebunt differentiæ eandem rationem quam magnitudines.

SINT tres magnitudines AB. AC. AD. in continua proportione, quarum differentiæ ſint BC. CD. Dico eſſe vt AC. ad AD. ita BC. ad CD. Nam quoniam eſt vt AB. ad AC. ita AC. ad AD. erit diuidendo, & permutando vt BC. ad CD. ita AC. ad AD. ideſt AB. ad AC. quod erat demonſtrandum.

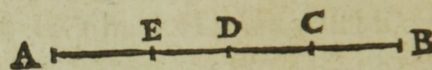


THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI ſint tres magnitudines in continua proportione maiori, ſintque priores poſterioribus maiores: maior erit ratio differentiæ magnitudinis primæ & ſecundæ, ad differentiam ſecundæ & tertiæ,

quam magnitudinis primæ ad ſecundam, aut ſecundæ ad tertiam.

SINT tres magnitudines AB. AC. AD. in continua proportione maiori, ſitque BC. differentia primæ & ſecundæ magnitudinis, & CD. differentia ſecundæ & tertiæ, ſitque AB. maior quam AC. & AC. quam AD. Dico maiorem eſſe rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. aut AC. ad AD. Fiat vt BA. ad CA. ita CA. ad AE. erit AE. minor quam AD. cadetque punctum E. inter D. & A. Quare cum ſit vt AB. ad AC. ita AC. ad AE. erit vt BC. differentia primæ & ſecundæ magnitudinis, ad CE. differentiam ſecundæ & tertiæ, ita AB. ad AC. ſed maior eſt ratio BC. ad CD. quam BC. ad CE. igitur maior eſt ratio BC. ad CD. quam AB. ad AC: ſed etiam AB. ad AC. maior eſt quam AC. ad AD. Igitur maior eſt ratio BC. ad CD. quam AC. ad AD. Quod erat demonſtrandum.



10.5.

Lẽma precedens

8.5.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI ſint tres magnitudines in continua proportione minori, ſintque priores poſterioribus maiores: minor erit ratio differentiæ primæ & ſecundæ magnitudinis, ad differentiam ſecundæ & tertiæ, quàm magnitudinis primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam.

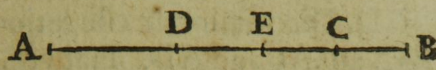
SIT minor ratio AB. ad AC quam AC. ad AD. ſintque priores poſterioribus maiores, & differentiæ ſint BC. CD. Dico minorem eſſe rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. aut AC. ad AD. Fiat vt AB. ad AC. ita CA. ad AE. erit AE. maior quam AD. & cadet inter D. & C. Erit igitur, per lemma præcedens, eadem ratio BC. ad CE. quæ AB. ad AC. ſed ratio

10.5.

Lẽma 15. huius.

tio BC. ad CD. minor est quam ratio BC. ad CE. igitur minor est quàm ratio AB. ad AC. ideoque etiam quam AC. ad AD. quæ ratione AB. ad AC. minor posita est. Quod erat ostendendum.

8.5.



THEOREMA XVII. PREPOS. XVII.

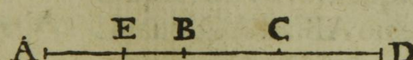
SI fuerint tres magnitudines in continua proportione maiori, sintque priores posterioribus minores; minor erit ratio differentiæ primæ magnitudinis & secundæ, ad differentiam secundæ & tertiæ, quam magnitudinis primæ ad secundam, aut secundæ ad tertiam.

SIT maior ratio AB. ad AC. quam AC. ad AD. sintque priores posterioribus minores, & differentiæ sint BC. CD. Dico minorem esse rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. & AC. ad AD. Fiat vt AC. ad AD. ita AE. ad AC. minor erit AE. quam AB. cadetque punctum E. inter A. & B. Igitur cum sit vt AE. ad AC. ita AC. ad AD. erit, per lemma præcedens, vt AC. ad AD. ita EC. ad CD. sed BC. ad CD. minorem habet rationem quam EC. ad CD. Igitur minorem habet rationem quam AC. ad CD. sed AC. ad AD. minorem habet quam AB. ad AC. igitur BC. ad CD. etiam minorem habet quam AE. ad EC. Quod erat, &c.

10.5.

Lẽma 15. huius

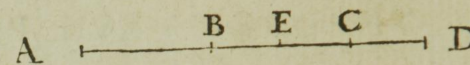
8.5.



THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

SI fuerint tres magnitudines in continua proportione minori, & ordine minores; maior erit ratio differentiarum quàm magnitudinum.

SIT minor ratio AB. ad AC. quàm AC. ad AD. minorque sit AB. quam AC. & AC. quam AD. & differentiæ, vt prius BC. CD. Dico maiorem esse rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. aut AC. ad AD. Fiat vt AC. ad AD. ita AE. ad AC. erit AE. maior quam AB. cadetque inter pũcta BC. cum igitur sit vt AE. ad AC. ita AC. ad AD. erit per lemma 15. huius vt AC. ad AD. ita EC. ad CD. sed BC. ad CD. maiorem habet rationem, quàm EC. ad CD. igitur etiam maiorem habet rationem quam AC. ad AD. sed etiam AC. ad AD. maiorem habet rationem quàm AB. ad AC. ergo BC. ad CD. maiorem habet rationem quam AB. ad AC. Quod fuit demonstrandum.



10.5.

8.5.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

SI fuerint tres quantitates in continua ratione maiori, & ordine maiores; duæ differentiæ cum tertia quantitate erunt in continua ratione maiori.

SINT tres quantitates AB. AC. AD. AB. maior quã AC. & AC. quam AD. maiorque sit ratio AB. ad AC. quam AC. ad AD. Dico maiorem esse rationem BC. ad CD. quam CD. ad DA. Quoniam enim tres quantitates AB. AC. AD. sunt in continua proportione maiori, maior erit ratio differentiæ BC. ad differentiam CD. quam CA. secundæ magnitudinis, ad DA. tertiam sed CA. ad AD. maiorem habet rationem quam CD. ad AD. ergo multo maiorem habet BC. ad CD. quam CD. ad DA.



15. huius

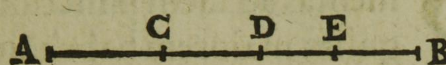
8.5.

THEO-

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

SI fuerint quotcumque quantitates in continua proportione maiori, & ordine maiores; maior erit ratio primæ differentiæ ad ſecundam differentiam, quam vltimæ differentiæ ad vltimam magnitudinem.

SINT quatuor quantitates AB. CB. DB. EB. ſitque maior ratio AB. ad CB. quam CB. ad DB. & DB. ad EB. & AB. maior quam CB. & CB. quam DB. & DB. quam EB. Dico maiorem eſſe



rationem AC. ad CD. quàm DE. ad EB. Quoniam maior eſt ratio AC. ad CD. quam AB. ad CB. id eſt quam CB. ad DB. & DB. ad EB. at vero DB. ad EB. maior eſt quam DE. ad EB. maior ergo erit ratio AC. ad CD. quam DE. ad EB. Quod fuit demonſtrandum.

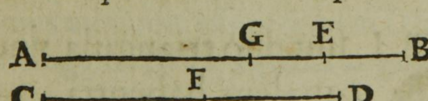
15. huius

8.5.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam, fueritq; prima maior quàm ſecunda, aut tertia: etiam differentia primæ & ſecundæ erit maior, quàm differentia tertiæ & quartæ.

HABEAT prima quantitas AB. ad ſecundam EB. maiorem rationem quam tertia CD. ad quartam FD. ſitque AB. maior quam AE. aut CD. Dico maiorem eſſe AE. differentiam primæ & ſecundæ, quàm CF. differentiam tertiæ & quartæ. Cum enim maior ſit ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. erit eadem ad



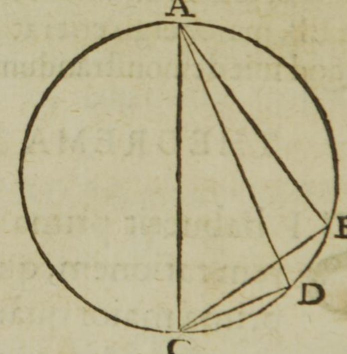
10.5.

ad maiorem aliquam BG. sit igitur vt AB. ad BG. ita CD. ad DF. erit per connersionem ra tionis vt AB. ad AG. ita CD. ad CF. & permutando vt AB. ad CD. ita AG. ad CF. Sed maior est AB. quam CD. ex hypothesi, igitur maior est AG. quam CF. & adhuc maior AE. quam CF. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

SI duo arcus circuli inæquales sint suis complementas ad idem punctum minores, singuli singulis; maiorem habebunt rationem quàm complementa, si maiores cum minoribus comparentur.

SIT circulus CEA. in quo arcus duo inæquales CD. minor, CE. maior, quorum complementa ad idem punctum A. sint arcus DA. minoris, EA. maioris, ille maior quam CD. hic quam CE. Dico maiorem esse rationem CE. ad CD. quam AD. ad AE. Cum. n. maior sit arcus AE. arcu EC. ideoque arcu CD. si duobus AE. CD. addatur communis DE. maior erit ratio AE. ad CD. quã AD. ad CE. Et permutando maior AE. ad AD. quam CD. ad CE. ideoque maior CE. ad CD. quam AD. ad AE. Quod fuit ostendendum.



1. huius

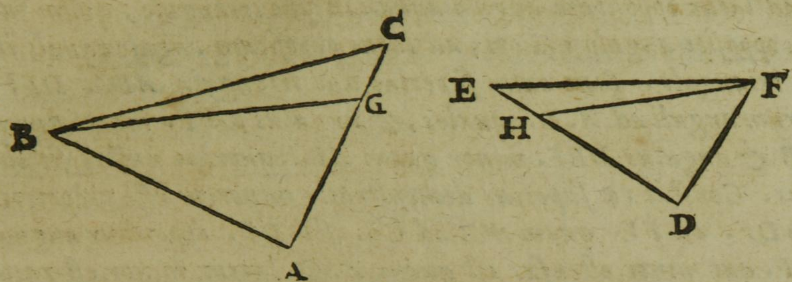
Corol. 26.5.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

SI sint duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia, reliquos duos inęquales, quorum neuter sit obtusus; minor erit ratio lateris adiacentis angulo maiori, ad latus oppositum angu-

angulo ęquali in vno triangulo, quam lateris adiacentis angulo minori, ad latus oppositum angulo ęquali, in altero triangulo.

SINT duo triangula ABC.DEF. quorum anguli ad A.D. sint æquales, angulus vero ABC. maior quam DEF. ideoque 32.1.



ACB. minor quam DFE. nullus autem angulorum ad B. C. E. F. sit obtusus. Dico minorem esse rationem AB. lateris adiacentis angulo maiori ABC. ad latus BC. oppositum angulo æquali A. quam lateris DE. adiacentis angulo minori DEF. ad latus EF. oppositum angulo æquali D. Fiat angulus ABG. æqualis angulo DFE. erit triangulum ABG. æquiangulum triangulo AEF. Igitur angulus AGB. æqualis angulo DFE. cum vero angulus DFE. id est AGB. non sit obtusus, erit vel rectus vel acutus, si rectus erit eius complementum BGC. etiam rectus; si acutus erit angulus BGC. obtusus, ergo angulus BCG. acutus; maius igitur latus BC. quam BE. Cum igitur in triangulis æquiangulis DEF. ABG. sit vt DE. ad EF. ita AB. ad BG. habeat autem AB. ad BG. maiorem rationem quam AB. ad BC. etiam DE. ad EF. maiorem habebit rationem quam AB. ad BC. atque adeo minor est ratio lateris AB. ad latus BC. quam lateris DE. ad latus DF.

32.1. 13.1. 32.1. 19.1. 4.6. 8.5. 13.5.

Eodem modo demonstrabimus minorem esse rationem DF. ad FE. quam AC. ad CB. si fiat angulus EFH. æqualis angulo BCA. idem enim prorsus efficitur.

CO-

COROLLARIVM I.

Hinc sequitur; si sint duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia, reliquos duos inæquales, quorum neuter sit obtusus, minor erit ratio lateris oppositi angulo minori, ad latus oppositum angulo æquali in vno triangulo, quam lateris oppositi angulo maiori, ad latus oppositum angulo æquali in alio triangulo. Sint enim superius duo triangula ABC. DEF. quorum anguli ad A. D. æquales, & angulus DFE. maior quam ACB. & angulus DEF. minor quam ABC. quorum nullus sit obtusus. Constat ex superius demonstratis minorem esse proportionem DF. ad FE. quam AC. ad CB. sed DF. opponitur angulo DEF. qui minor ostensus est quam ABC. Igitur minor est ratio lateris DF. oppositi minori angulo E. ad latus EF. oppositum vni æqualium D. quam lateris AC. oppositi maiori angulo B. ad latus BC. oppositi angulo æquali A.

COROLLARIVM II.

Rursus positis quæ superius, maior erit ratio lateris oppositi angulo æquali, ad latus oppositum angulo minori in vno triangulo, quam lateris oppositi alteri æqualium angulorum, ad latus oppositum maiori angulo. Ostensum enim est minorem esse rationem AB. ad BC. quam DE. ad DF. Igitur conuertendo maior erit ratio CB. oppositi vni angulorum æqualium A. ad latus AB. oppositum minori angulo C. quam lateris FE. oppositi alteri æqualium angulorum ad latus ED. oppositum maiori angulo DFE.

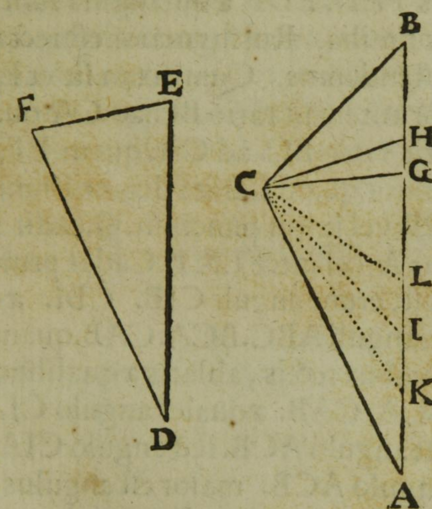
THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

SI sint duo triangula quæ vnum angulum vni angulo æqualem habeant, habeat autem alterum ipsorum angulum quolibet angulo reliqui

trian-

trianguli maiorem: maior erit ratio lateris oppositi angulo æquali, ad alterum latus adiacens angulo maximo, quam lateris oppositi angulo æquali, ad latus quodlibet reliquum in altero triangulo.

SINT duo triangula ABC. DEF. quorum illud habeat angulum ACB. maiorem quolibet angulorum DEF. DFE. sintque anguli ad D.A. æquales. Dico maiorem esse rationem lateris BC. oppositi vni angulorum æqualium A. in triangulo ACB. ad latus CA. adiacens angulo ACB. quam lateris FE. oppositi alteri angulorum æqualium D. ad quodlibet laterum DE. DF. Sint enim primum anguli F. E. non obtusi, & fiat angulus ACH. æqualis angulo DEF. cadet CH. intra triangulum, quod maior sit angulus ACB. angulo DEF. cumque æquales sint anguli D. A. æquiangula erunt triangula ACH. DEF: & anguli AHC. DFE. æquales, angulus autem DFE. ex hypothesi vel rectus est, vel acutus. Igitur etiam angulus AHC. vel rectus est vel acutus ac proinde eius complementum CHB. vel rectus vel obtusus, acutus igitur est CBA. ideoq; maior est recta CB. quam recta CH. Igitur etiam maior est ratio BC. ad CA. quam HC. ad CA. id est quam FE. ad ED. (cum similia sint triangula FED. HCA.) in altero triangulo.



32.1. 13.1. 32.1. 19.1. 8.5. 13.5.

Rursus fiat angulus ACG. æqualis angulo EFD. eodem prorsus modo ostendemus æquiangula esse triangula DEF. AGC. & angulum AGC. angulo FED. esse æqualem, qui cum sit rectus aut acutus, erit CGB. rectus aut obtusus, sed B. ostensus est acutus; maius igitur latus CB. quàm CG. Quare

maior ratio BC. ad CA. quam CG. ad CA. id est quam EF. ad FD. Quod erat ostendendum. Iam vero sit DEF. obtusus, ex hypothesi minor quàm BCA. ac proinde DFE. acutus, fiatque angulus ACH. æqualis angulo DEF. erit angulus ad H. æqualis angulo ad F. ex paulo ante demonstratis, ideoque acutus, quare eo modo quo prius probabitur maiorem esse rationem BC. ad CA. quam FE. ad ED. Sed angulo FED. obtuso fiat æqualis CGA. cum æquales sint anguli CGA. GAC. angulis FED. EDF. æquiangula sunt triangula FED. CGA. quare & similia. Rursus maior est recta BC. quam recta CG. vt mox ostendemus. Quare cum sit vt EF. ad FD. ita GC. ad CA. maior autem sit ratio BC. ad CA. quam GC. ad CA. maior etiam erit ratio BC. ad CA. quam EF. ad FD. Quod vero CG. sit minor quam CB. ita demonstramus. Sumatur CI. æqualis ipsi CB. vel igitur punctum. G. cadit in punctum. I. vel vltra. I. versus A. vel inter I. & B. Cadat primum in punctum. I. si fieri potest, erunt anguli CIB. CBI. æquales cum igitur tam anguli trianguli ABC. BCA. CAB. quam duo CIA. CIB. æquales sint duobus rectis, ablatis æqualibus CBI. CIB. remanebunt duo BCA. CAB. æquales angulo CIA. ergo angulus CIA. maior est angulo ACB. sed angulo CIA. ponitur æqualis FED. ergo angulo ACB. maior est angulus FED. quod est contra hypothesim, qua ponebatur minor. Quod si dicatur cadere in punctum K. inter I. & A. adhuc maior erit angulus ille, cum maior sit angulus externus AKC. interno & opposito AIC. Si vero cadat inter I. & B. vt in L. tunc CL. subtendens angulum acutum CIL. minor est recta CI. subtendente angulum obtusum CLI. atque etiam ei æquali CB. atque hoc modo in quodcumque punctum cadat ipsum G. ostendetur recta GC. minor quàm CB. Quare sequetur quod demonstrandum erat.

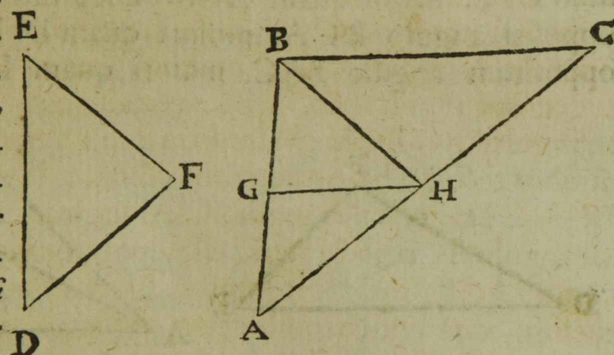
(Marginal notes: 32.1. 4.6. — 5.1. — 32.1. 13.1. — 16.1. — 19.1.)

SCHOLIVM.

Ex dictis colligitur si duo qualibet triangula comparentur, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habeant, maiorem

esse

esse rationem lateris oppositi angulo æquali, ad latus adiacens angulo maiori in vno triangulo, quam lateris oppositi angulo æquali ad latus adiacens angulo minori in altero triangulo; & conuertendo, minorem esse rationem lateris adiacentis angulo maiori, ad latus oppositum angulo æquali, quam adiacentis angulo minori, ad oppositum angulo æquali; hoc enim duabus præcedentibus demonstratum est. Exclusimus. a. in Coroll. 23. huius, ex angulis inæqualibus, obtusum, non sine ratione. Potest enim contingere si alterum triangulorum sit amblygonium, vt non sit minor ratio lateris oppositi angulo minori, ad latus oppositum angulo æquali in vno triangulo, quam ratio lateris oppositi angulo maiori in altero, sed aliquando æqualis, aut maior. Sit triangulum ABC. obtusiangulum ad B. & oxygonium DEF. cuique angulus EDF. æqualis angulo BAC. fiatque angulus ABH. æqualis angulo DEF. erunt triangula DEF. ABH. æquiangula, ac similia. Ducatur HG. ipsi BC. parallela; Quod si fuerit GH. minor quam HB. aut angulus HGB. maior quam HBG. maior erit ratio AH. ad HG. id est AC. lateris oppositi angulo maiori ABC. ad CB. latus oppositum angulo æquali A. quam AH. ad HB. id est DF. latus oppositum angulo minori E. ad FE. latus oppositum angulo æquali D. Si vero HG. fuerit ipsi HB. æqualis & angulus HGB. angulo HBG. æqualis, erit vt AH. ad HG. id est vt AC. ad CB. ita AH. ad HB. scilicet DF. ad FE. Sin autem GH. fuerit maior, & angulus HGB. minor angulo HBG. minor erit ratio AH. ad HG. id est AC. ad CB. quam AH. ad HB. seu DF. ad FE.

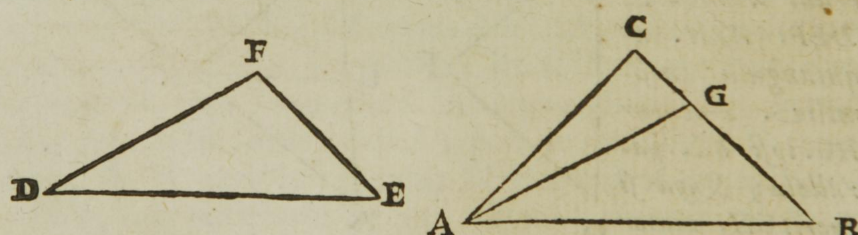


8.5.
4.6.
4.6.
8.5.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI duo triangnla vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, reliquos inæquales: latus oppoſitum minori angulo vnius trianguli, ad latus oppoſitum maiori minorem habet rationem, quàm latus oppoſitum maiori angulo in alio triangulo, ad latus oppoſitum minori.

SINT duo triangula ABC. DEF. in quibus anguli ABC. DEF. æquales, reliquorum BAG. ſit maior quam EDF. atque ideo DFE. maior quam ACB. Dico rationem lateris AB. oppoſiti angulo BCA. minori quam DFE. ad BC. latus oppoſitum angulo BAC. maiori quam EDF. eſſe mino-



rem ratione lateris DE. oppoſiti angulo maiori F. ad latus FE. oppoſitum angulo minori D. Fiat angulus BAG. æqualis minori EDF. Cum æqualis poſitus ſit angulus B. angulo E. & factus angulus BAG. æqualis angulo D. ęquiangula erunt triangula ABG. DEF. eſt ergo vt DE. ad EF. ita AB. ad BG. ſed AB. ad BG. maior eſt ratio quam AB. ad BC. Igitur etiam DE. ad EF. maior eſt ratio quam AB. ad BC. atque adeo minor eſt ratio AB. ad BC. quam DE. ad EF.

32.1. 4.6. 8.5. 13.5.

CO-

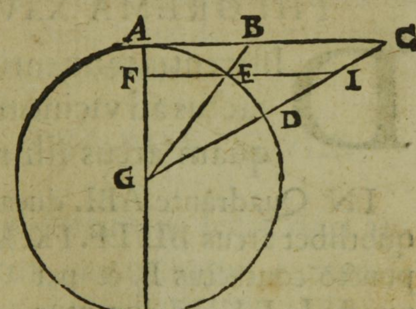
COROLLARIVM.

EOdem modo ostenditur, latus oppositum maiori angulo vnius trianguli, ad latus oppositum minori maiorem habere rationem, quam latus oppositum minori angulo in alio triangulo, ad latus oppositum maiori; ostensum enim est, maiorem esse rationem DE. ad EF. quam AB. ad BC.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

ARcuum inęqualium in Quadrante, tangens maioris ad tangentem minoris maiorem habet rationem, quam arcus maior ad minorem.

IN circulo AED. cuius centrum G. diameter GA. secans circulum in A. sit arcus maior AD, minor AE. & ex puncto A. ducatur ipsi GA. perpendicularis AC. tangens circulum in A. quam productam quantumlibet secent rectæ ex G. centro per puncta E.D. ductæ, in punctis B. C. erit AC. tangens maioris arcus, & AB. minoris, ex definitione tangentium. Dico maiorem esse rationem CA. ad AB. quam arcus DA. ad arcum AE. Ducatur ex E. termino minoris arcus ad AG. perpendicularis EF. quæ producta secet rectam GC. in puncto I. Quoniam minor est proportio trianguli FGE. ad triangulum EGI. quam sectoris AGE. ad idem triangulum EGI. & rursus minor est proportio sectoris AGE. ad triangulum EGI. quàm eiusdem sectoris AGE. ad sectorem EGD. minor erit proportio trianguli FGE. ad triangulum EGI. quam sectoris AGE. ad sectorem EGD. Sed vt triangulum FGE. ad triangulum EGI. ita recta FE. ad rectam EI. & vt sector AGE. ad sectorem EGD. ita arcus



8.5.
8.5.
Schol. 13.5.
1.6.
33.6.

cus AE. ad arcum ED. minor igitur erit ratio FE. ad EI. quam arcus AE. ad arcum AD. Quare conuertendo, & componendo, maior erit proportio FI. ad FE. id est. CA. ad AB. quam arcus AE. ad arcum AB. Quod erat demonstrandum.

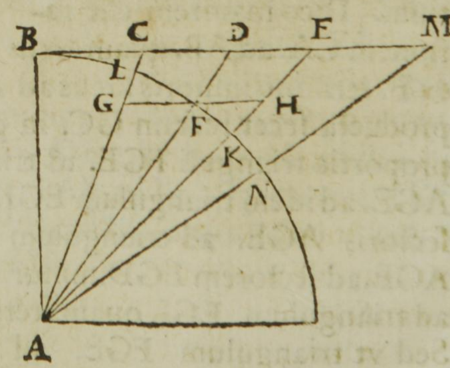
SCHOLIVM.

IN sequentibus propositionibus sæpe nominibus chordarum, sinuum, tangentium, secantium vtemur quorum licet plæraque vetustioribus mathematicis incognita fuerint, a recentioribus tamen passim vsurpantur, in triangulorum præsertim calculis, quæ nos etiam ad Geometricas demonstrationes traducemus, vt breuitati, ad quam mirum momentum habent, consulamus: multa enim, quæ longis ambagibus describenda essent, vnico verbo complectemur. Horum definitiones qui ignorat, reperiet apud Io. Regiomontanum lib. 1. de triangulis definit 12. & 13. Christophorum Clauium tractatu de sinubus; Maginum, Pitiscum, Landsbergium, & alios quotquot de triangulis rectilineis ac sphæricis scripserunt.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

DIfferentia tangentium remotior à punto contactus ad vicinorem maiorem habet rationẽ, quam arcus illi respondens ad arcum.

IN Quadrante ABI. ducatur tangens BM., & sumantur quotlibet arcus BL. LF. FK. KN. quorum primi propiores sint puncto contactus B. & per puncta L. F.K. N. ducantur secantes AC. AD.AE.AM. erunt DC. ED. ME. differentiæ tangentium, quarum primæ viciniores sunt puncto contactus B. Dico maiorem esse rationem ED. ad DC. quam arcus KF. ad arcum FL. & maiorem ipsius ME. ad DC. quam arcus NK. ad arcum FL. Vel enim



dif

differentiæ illæ coniunctę sunt, vel separatæ: sint primo coniunctæ, ac per punctum F. in quo AD. circulum secat ducatur HG. ipsi MB. parallela secans AE. AC. in punctis H. G. Quoniam minor est ratio trianguli GAF. ad triangulum FAH. quam sectoris LAF. ad idem triangulum FAH. & adhuc minor est ratio sectoris LAF. ad triangulum FAH. quam eiusdem sectoris LAF. ad sectorem FAK. minor erit ratio trianguli GAF. ad triangulum FAH. quam sectoris LAF. ad sectorem FAK. ideoque maior erit ratio sectoris LAF. ad sectorem FAK. id est arcus LF. ad arcum FK. quam trianguli GAF. ad triangulum FAH. id est quam GF. ad FH. ergo maior ratio HF. ad FG. id est rectæ ED. ad rectam DC. quam arcus KF. ad arcum FL. quod prius demonstrare oportebat.

8.5. 13.5. 33.6. 1.6. 4.6. Cor. 16.5.

Sint secundo differentiæ illæ, vt ME. DC. separatæ intermedia ED. cum maior sit ratio ME. ad ED. ex paulo ante demonstratis, quam NK. ad KF. & ratio ED. ad DC. etiam probata sit maior quam KF. ad FL. erit ex æqualitate maior ratio ME. ad DC. quam NK. ad FL. Quod secundo erat demonstrandum. Igitur differentia tangentium &c.

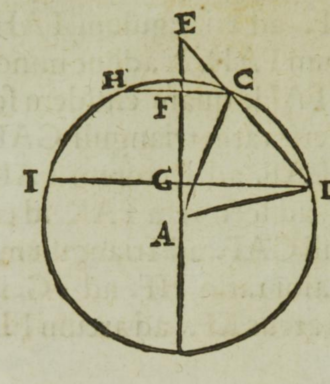
THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

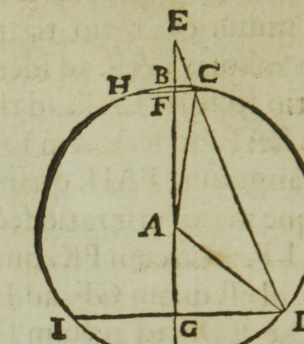
SI ex puncto vbi diameter circulum secat duo arcus inæquales sumantur, ex quorum extremis ad diametrum duæ inter se parallelæ ducantur; maior erit ratio maioris arcus ad minorem, quàm lineæ ductæ ab extremo maioris arcus, ad eam quæ ab extremo minoris ducta est.

EX puncto B. vbi diameter AB. circulum BCD. secat, sumantur duo arcus inæquales BC. minor BD. maior, ex quorum extremis C. D. ducantur parallelæ CF. DG. secantes diametrum in punctis F. G. Dico maiorem esse rationem arcus BD. ad arcum BC. quam rectæ DG. ad rectam CF. Connectantur

tur

tur puncta CD. recta DCE. quæ vel concurret cum diametro producta, vt in prioribus figuris, vel erit parallela vt in poste-

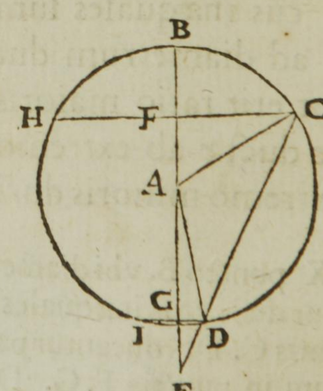




riori. Concurrat primo ex parte arcuum ſumptorum in E. & ducantur AC. AD. Quoniam minor eſt ratio ſectoris BCA. ad ſectorem ACD. quam trianguli ECA. ad eundem ſectorem ACD. & adhuc minor trianguli ECA. ad ſectorem ACD. quàm trianguli ECA. ad triangulum CDA. multo minor erit ratio ſectoris BCA. ad ſectorem ACD. id eſt, arcus BC. ad arcum GD. quam trianguli ECA. ad triangulum CDA. id eſt rectæ EC. ad rectam CD. & conuertendo, ac componendo, maior ratio arcus DB. ad arcum BC. quam DE. ad EC. id eſt, quam DG. ad CF.

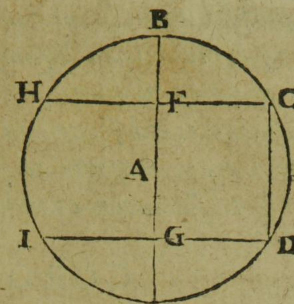
8.5. 13.5. 33.6. 1.6. 4.6.

Concurrat ſecundo DC. non ex parte arcuum ſumptorum, vt in tertia figura ſed in parte oppoſita, ſitque FC. maior quam GD. Conſtat maiorem eſſe rationem arcus DB. ad arcum BC. cum ſit maioris inæqualitatis, quam GD. ad FC. quæ proportio minoris inæqualitatis eſt.



Si

Si vero DÇ. sit parallela ipsi AB. cum parallelæ etiam sint FC. GD. æquales erunt FC. GD. cum ergo maior sit arcus DB. quam BC. maior erit ratio arcus DB. ad arcum CD. maioris inæqualitatis, quam ratio GD. ad FC. quæ æqualitatis est. Quod erat demonstrandum.



34.1.

COROLLARIVM I.

Hinc patet, quod arcus maior ad minorem maiorem habet rationem, quam sinus rectus arcus maioris, ad sinum rectum minoris. Si enim tam CF. quam GD. sint ad diametrum perpendiculares, manifestum est ex definitione sinus, rectam CF. esse sinum rectum arcus BC. & rectam DG. sinum rectum arcus BD. ostensum autem est maiorem esse rationem arcus BD. ad arcum BC. quam rectæ DG. ad rectam CF.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam deducitur maiorem esse rationem arcus ad arcum, quam subtensæ seu chordæ maioris arcus ad chordam minoris. Sint enim duo arcus DBI. CBH. ille maior, hic minor, quorum chordæ DI. CH. qui diuidantur bifariam, & ad rectos à diametro BA. in punctis G.F. Eodem modo ostendemus maiorem esse rationem DB. ad BC. quam DG. ad CF. & terminorum proportionis duplicatione, maiorem esse rationem arcus DBI. ad arcum CBH. quam chordæ DI. ad chordam CH.

3.3.

15.5.

COROLLARIVM III.

Præterea sequitur ex demonstratis maiorem esse rationem arcus maioris ad minorem, quàm secantis complementi minoris arcus, ad secantem complementi maioris. Est enim, vt mo-

do de monstratum est, maior ratio arcus maioris ad minorem quam sinus recti maioris ad sinum rectum minoris, vt autem sinus rectus arcus maioris ad sinum rectum minoris, ita secans complementi arcus minoris ad secantem complementi maioris. Igitur maior est ratio arcus maioris ad minorem, quam secantis complementi minoris ad secantem complementi maioris.

Clauius. 22. de secantibus.

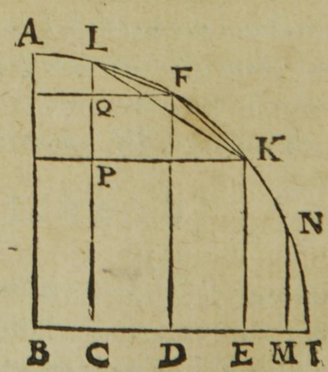
COROLLARIVM IV.

DEnique constat si ex puncto quolibet diametri productæ ducatur recta circulum secans, maiorem esse rationem partis illius rectæ extra circulum ad eam quæ circuli arcum subtendit, quàm arcus diametro & secante comprahensus ad arcum quẽ pars secantis subtendit: ostensum enim est maiorem esse rationem EC. ad CD. quam arcus BC. ad arcum CD.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

DIfferentia tam sinuum rectorum quam versorum vicinior centro circuli ad remotiorem maiorem habet rationem, quam arcus cui differentia subtenditur, ad arcum.

IN Quadrante ABI. cuius centrum B. latera BA. BI. sumantur quotlibet arcus IN. IK. IF. IL. IA. & ducantur sinus recti NM. KE. FD. LC. AB. paralleli diametro AB. erunt MI. EI. DI CI. sinus versi dictorum arcuum. Rursus arcuum AL. AF. AK. AN. AI. sinus recti erunt rectæ BC. BD. BE. BM. BI. & ME. ED. DC. differentiæ tam sinuum rectorum quã versorum. Dico maiorem esse rationem CD. quæ vicinior est centro B. ad DE. quæ remotior est,

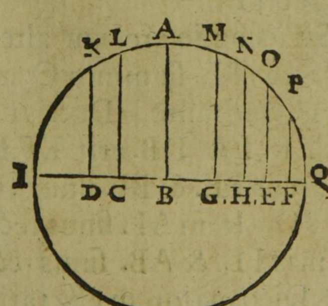


quam

quam arcus LF. ad arcum FK. Item maiorem esse rationem DC. ad ME. quam arcus FL. ad NK. Ducantur chordæ KF. FL. KL. Item ex F. & K. perpendiculares ad AB. rectæ FG. KH. secantes CL. in punctis P.Q. Quoniam in triangulis rectangulis KPL. FQL. maior est angulus QLF. angulo PLK. minor erit reliquus QFL. reliquo PKL. Igitur minor est ratio PK. ad KL. quam QF. ad FL. & permutando minor ratio KP. ad FQ. id est EC. ad DC. quam KL. ad LF. sed KL. chorda arcus KL. ad FL. chordam arcus FL. minorem habet rationem quam arcus KL. ad arcum FL. Igitur recta EC. ad rectam CD. minorem habet rationem, quàm arcus KL. ad arcum FL. & diuidendo, & conuertendo, maiorem habet rationem DC. ad DE. quam arcus FL. ad arcum FK. Atque eodem prorsus modo demonstrabitur maiorem esse rationem DE. ad EM. quam arcus FK. ad arcum KN. & EM. ad MI. quam KN. ad NI. Sed non sint differentiæ coniunctæ, vt DC. ac ME. Rursus cum maiorem habeat rationem DC. ad DE. quàm arcus FL. ad arcum FK. Item etiam maiorem habeat DE ad EM. quã arcus FK. ad arcũ KN. habebit ex æqualitate DC. ad ME. maiorem rationem quam arcus FL. ad arcum KN.

32.1.
23. huius.
34.1.
Cor. 2.28. huius
13.5.

Denique sint dictæ differentiæ in diuersis Quadrantibus, vt differentia DC. in Quadrante BAI. & differentia EF. in Quadrante BAQ. illa vicinior, hæc remotior à centro: sumantur rectæ BG. BH. æquales ipsis BC. BD. erunt DC. GH. æquales & EF. remotior à centro quam GH. quare maior erit ratio GH. ad EF. quam arcus MN. respondentis ipsi GH. ad arcum OP. respondentem differentiæ EF; vt probatum est prima parte huius, sed differentiæ GH. æqualis est differentia DC. & arcui MN. arcus KL. Igitur maior est ratio DC. ad EF. quam arcus KL. ad arcum OP. Quod erat demonstrandum.

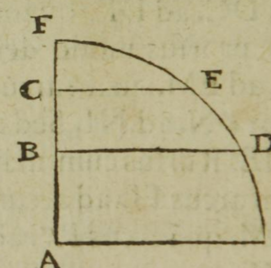


28.3.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

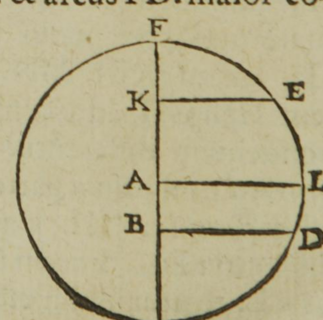
SI sint duo arcus inæquales, minor vterque Quadrante, aut alter maior alter minor; maior ad minorem minorem habet rationem, quàm sinus versus maioris ad sinum versum minoris.

IN circulo FEL. sumantur primum duo arcus in Quadrante FL. (cuius cētrum A. duæ diametri perpendiculares AF. AL.) scilicet DF. maior & EF. minor. Ex punctis E. D. in diametrum AF. ducantur sinus recti DB. EC. erit BF. sinus versus maioris arcus DF. & CF. sinus versus minoris EF. Dico maiorem esse rationem BF. ad FC. quam arcus DF. ad arcum FE. Est enim FC. differentia FA. sinus recti Quadrantis FEL. & sinus recti CA. arcus EL. Item CB. est differentia sinus recti CA. arcus EL. & sinus recti AB. arcus DL. Igitur maior est ratio differentiæ BC. vicinioris centro, ad differentiam CF. remotiorem, quam arcus DE. ad arcum EF. & componendo, maior est ratio BF. ad FC. quam DF. ad FE.



29. huius

Sit secundo arcuum alter maior Quadrante, alter minor: vt, arcus FE. sit minor Quadrante FL. & arcus FD. maior eodem Quadrante. Ductis sinibus rectis EK. LA. DB. erit KF. sinus versus arcus FE. & BF. sinus versus arcus FD. Item AF. sinus rectus Quadrantis FL. & AB. sinus rectus arcus LD. Dico maiorem esse rationem BF. ad KF. quam arcus DF. ad arcum EF Quoniam maior est arcus FL. arcu LD. maior erit ratio arcus FL. ad arcum



Cor. 2 28. huius

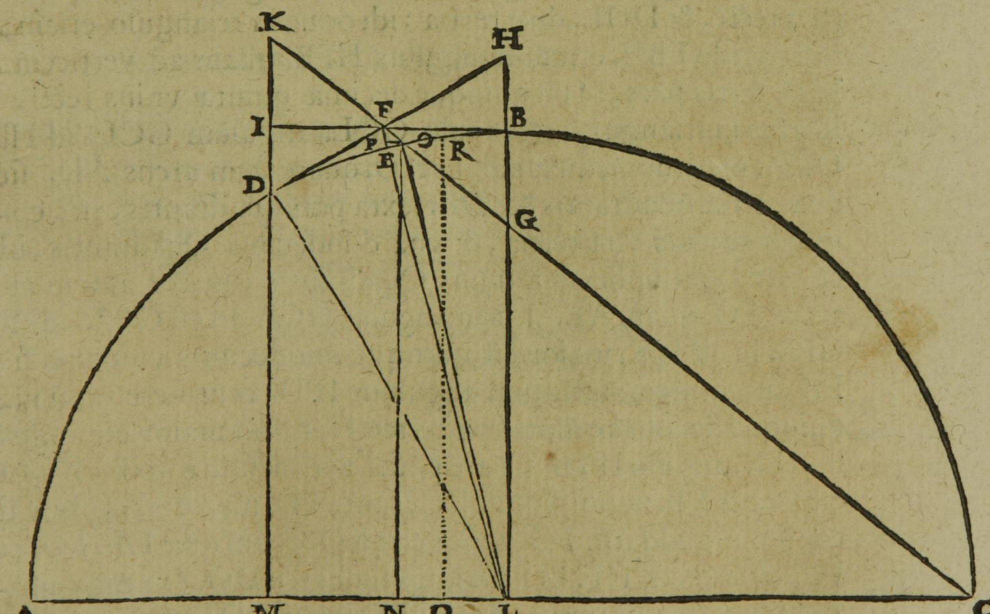
cum LD. quam FA. ſinus recti arcus FL. ad AB. ſinum rectum arcus LD. Igitur maior ratio AB. ad AF. quam arcus LD. ad arcum FL. & componendo maior ratio BF. ad FA. quam DF. ad FE. ſed FA. ad FK. maiorem habet rationem quam LF. ad FE; vt prima parte huius propoſitionis demonſtratum eſt, ergo ex æquali maior eſt ratio BF. ad FK. quam ſinus DF. ad FE. ideoque minor ratio arcus DF. ad arcum FE. ſinus quam verſi BF. ad ſinum verſum KF. Quod ſecundo loco erat oſtendendum.

Cor. 16.5.

PROBLEMA I. PROPOS. XXXI.

CIrculum ita ſecare, vt ſinus verſi arcuum Quadrante maiorum maiorem habeant rationem, quam arcus; ſi maiores cum minoribus comparentur.

CENTRO L. deſcribatur circulus ABC. cuius diame-



ter

ter AC. & ex L. ducta perpendicularis LB. secet circulum in duos Quadrantes AB. BC. & sumatur arcus BD. qui sit tertia pars Quadrantis. Item ex D. recta DM. perpendicularis diametro AC. Ex punctis autem D. & B. ducantur duæ rectæ DH. BI. tangentes circulum in punctis D.B.& occurrentes rectis LB. MD. productis in H. I. ac secantes se in puncto F. Per punctum F. ex puncto C. ducatur CFK. recta secans MD.productam in K. & circulum in O. & LB. in G.& ex O. ducatur ad diametrum perpendicularis ON. erunt MC. NC. sinus versi arcuum DC. OC. quadrante maiorum. Dico maiorem esse rationem MC. ad NC. quam arcus DBC. ad arcum OBC. Connectatur LF. secans circulum in E. Quoniam triangula LDF. LBF. rectum angulum LDF. recto LBF. æqualem habent, estque vt DL. ad LF. ita BL. ad LF.& quilibet reliquorum angulorum DFL. BFL. minor recto, æquales erunt anguli DLE. BLE. ideoque æquales arcus DE. BE. ac cum DB. sit pars tertia Quadrantis, erit DE. sexta pars eiusdem, ac proinde in triangulo rectangulo LDH. erit angulus DLH. tertia pars recti, & DHL. duæ tertiæ; ideoque in triangulo etiam rectangulo FBH. erit tam angulus HFB. quam ad verticem IFD. tertia pars, id est quinque decimæ quintæ vnius recti. Rursus in triangulo rectangulo GCL. angulum GCL. id est OCA. metitur medietas arcus AO. quare cum arcus AD. sit duæ tertiæ quadrantis, & DE. sexta pars quadrantis, erit eorum medietas vna tertia, & vna duodecima Quadrantis, id est quinque duodecimæ ipsius Quadrantis; maior autem est arcus AO. quam AE. Igitur angulus OCA. id est GCL. id est GFB. id est IFK. maior est quinque duodecimis vnius recti. Est autem demonstratum angulum IFD. continere tantum quinque decimas quintas vnius recti. Igitur maior est angulus IFK. angulo IFD. Quare posito eodem sinu toto FI. maior est secans KF. maioris anguli, secante FD. minoris; quibus si communis addatur FO. maior erit KO. quam duæ DF. FO. at vero duæ rectæ DF. FO. maiores sunt arcu DO. (vt mox probabimus) maior igitur est recta KO. arcu DO. minor autem

[Margin notes: 32.1. / 7.6. / 26.3. / 29.1. / 15.1. / Archimedes.]

est

est chorda OC. arcu OBC. Igitur maior est ratio rectæ KO. ad rectã OC. quam eiusdem KO. ad arcum OBC. & KO. ad arcum OBC. maior quam arcus DO. (qui minor est recta KO.) ad arcum OBC. Igitur maior est ratio KO. ad OC. quam arcus DO. ad arcum OBC. sed vt KO. ad OC. ita MN. ad NC. Igitur maior est ratio MN. ad NC. quam arcus DO. ad arcum OBC. & componendo maior ratio MC. ad NC. quam arcus DC. ad arcum OC. Quod erat demonstrandum.

8.5.
13.5.
2.6.

Quod verò maiores sint DF. FO. quam arcus DO. ita probatur. Connectatur LO. & ducatur recta OP. tangens circulum in O. & secans LE. in P. supra punctum E. Cum in triangulo rectangulo LOP. angulus LOP. sit rectus, erit LPO. acutus, ergo in triangulo OPF. angulus OPF. obtusus; maius igitur est latus FO. latere PO. At vero maior est tangens DF. arcu DE. & tangens OP. arcu EO. Igitur duæ tangentes DF. PO. sunt maiores arcu DO. Sed duabus tangentibus DF. PO. maiores sunt probatæ DF. FO. & ipsis DF. FO. ostensa est maior KO. Igitur maior est KO. quam arcus DO.

32.1.
Archimedes. 1. de sphæra & cylindro

SCHOLIVM.

Potest etiam demonstrari, si punctum aliquod sumatur inter N. & L. vt punctum Q. & ducatur sinus rectus QR. maiorem esse rationem sinus versi MC. ad sinum versum QC. quam arcus DBC. ad arcum RBC. si enim non sit maior ratio MC. ad CQ. quam DBC. ad RBC. sit minor aut æqualis, ac ponatur primum minor. Cum maior sit ratio MC. ad CN. quam arcus DC. ad arcum CO. minor autem ratio MC. ad CQ. quam DC. ad CR. Igitur, ex 13. huius, maior erit ratio MN. ad MQ. quam arcus DO. ad arcum DR. & conuertendo, minor ratio QM. ad MN. quam RD. ad DO. & diuidendo, minor ratio QN. ad NM. quam RO. ad OD. quod est absurdum, ostensum enim est propositione 29. huius, maiorem esse rationem QN. ad NM. quam RO. ad OD.

31. huius
13. huius
29. huius

Sed dicatur ratio MC. ad CQ. eadem esse rationi DC. ad CR. Quoniam est vt MC. ad CQ. ita DC. ad CR. erit per conuersionem rationis, & conuertendo, vt MQ. ad MC. ita DR. ad DC. Iterum MC. ad CN. maiorem habet rationem quam DC. ad CO. vt in propositione ostensum est, erit per conuersionem rationis, minor ratio MC. ad MN. quam DC.

ad

ad DO. Quare cum sit vt MQ. ad MC. ita DR. ad DC. & MC. ad MN. minorem habeat rationem quam DC. ad DO. ex æqualitate, minor erit ratio MQ. ad MN. quam DR. ad DO. & diuidendo minor ratio QN. ad NM. quam RO. ad OD. Quod est absurdum, cum ex 29. huius, maior sit ratio QN. ad NM. quam RO. ad OD.

Schol. 32.5.

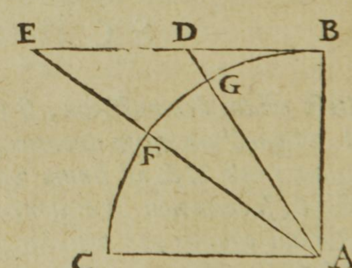
29. huius

In hoc problemate assumpsimus principium Archimedis, chordam esse arcu minorem, tangentem eodem maiorem, quod si ideo minus Geometricum videtur, saltem idem momentum habeat, quod multæ Archimedis propositiones ex illo fonte deriuatæ, quibus cum fidem hactenus nemo nisi ἀγεωμέτρητος abrogarit, neque nostram iisdem natalibus ortam, tanquam spuriam quisquam reiiciet.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXII.

TAngentis maioris arcus, ad tangentem minoris, maior est ratio, quam secantis maioris arcus ad secantem minoris.

IN Quadrante ABC. cuius centrum A. diameter AB. maioris arcus BF. sit tangens EB. secans AE. & minoris arcus BG. sit tangens DB. & secans AD. Dico maiorem esse rationem EB. ad DB. quam AE. ad AD. Cum enim in triangulis rectangulis ABD. ABE. maior sit angulus ADB. externus interno AEB. minor erit ratio BD. ad DA. quam BE. ad EA. & permutando, ac conuertendo, maior erit ratio EB. ad BD. quam AE, ad AD. Quod ostendendum erat.



16.1.

23. huius

PROBLEMA II. PROPOS. XXXIII.

QVadrantem ita secare in duos arcus, vt sinus versi æqualem, minorem, maioremue ratio-

tionem habeant, quam aut ſecantes eorumdem arcuum, aut ſinus recti complementorum, minorem vero quam tangentes eorumdem arcuum, ſi maiores cum minoribus comparentur.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. diametri inuicem perpendiculares, AB. AC. Sumatur primum recta AH. æqualis rectæ IC. & ducantur perpendiculares ad AC. rectæ HD. IE. ſecantes peripheriam Quadrantis in D. F. erit AH. ſinus rectus arcus. BD. & AI. ſinus rectus arcus. BE. at vero IC. erit ſinus verſus arcus EC. & HC. ſinus verſus arcus DC. qui duo poſteriores arcus priorum ſunt complementa. Dico eandem eſſe rationem ſinus verſi HC. ad ſinum verſum IC. quæ eſt ſinus complementi IA. ad ſinum complementi HA. Cum enim æquales ſint AH. IC. addita communi AH. æquales erunt HC. IA. vt igitur ſinus verſus HC. ad ſinum verſum IC. ita ſinus rectus IA. ad ſinum rectum HA. vt vero IA. ad HA. ita ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. vt a Clauio demonſtratum eſt. prop. 22. de ſecantibus. Igitur vt ſinus verſus HC. arcus DC. ad ſinum verſum IC. arcus EC. ita ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC.



2. Pron.

Clauius p. 22. de tangentibus.

Sit ſecundo ſinus verſus CI. maior ſinu recto HA. addatur communis IH. Quoniam duabus lineis inæqualibus maiori CI. minori HA. eadem quantitas IH. addita eſt, habebit per primam huius HC. ad CI. minorem rationem quam IA. ad HA. & quam ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam oſtendimus modo eandem habere rationem quam IA. ad HA.

1. huius.

Sit tertio ſinus verſus IC. minor ſinu recto HA. addita communi HI. eodem modo, ex prima huius, demonſtratur; maiorem eſſe rationem HC. ad IC. quam IA. ad HA. aut quam ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC.

1. huius.

23. huius. Deniq; cum maiorem habeat rationem tangens arcus DC. ad tangentem arcus EC. quam ſecans eiuſdem arcus DC. ad ſecantem arcus EC. ſecantes autem dictorum arcuum in duobus prioribus caſibus aut maiorem, aut æqualem rationem habeant, quam ſinus verſi eorumdem arcuum, habebit tangens 13. 5. arcus DC. ad tangentem arcus EC. maiorem rationem, quam HC. ſinus verſus arcus DC. ad IC. ſinum verſum arcus EC. Igitur quadrantem ita ſecauimus vt &c.

PROBLEMA III. PROPOS. XXXIV.

QVadrantem ita ſecare in duos arcus, vt tam ſecans maioris ad ſecantem minoris, quam ſinus rectus complementi minoris, ad ſinum rectum complementi maioris, maiorem habeant rationem, quam arcus maior ad minorem.

Fiant omnia quæ in duobus primis caſibus præcedentis propoſitionis. Dico maiorem eſſe rationem IA. ad HA. item ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam arcus DC. ad arcum EC. Cum enim, in primo caſu, ſit vt IA. ad AH. id eſt vt ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. ita HC. ſinus verſus arcus DC. ad IC. ſinũ verſum arcus EC. maior autem ſit ratio HC. ad IC. quam DC. ad EC. etiam IA. ad HA. & ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. maiorem habebunt rationem, quam arcus DC. ad arcum EC.

33 huius. Clau. p. 22. de ſecantibus. 30. huius. 13. 5.

Eadem, ac validiori ratione, in ſecundo caſu: cum maior ſit ratio IA. ad HA. item ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam HC. ad IC. & HC. ad IC. maior quam arcus DC. ad arcum EC. maior erit ratio IA. ad HA. & ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam ipſius arcus DC. ad arcum EC. Quare Quadrantem ita ſecauimus &c.

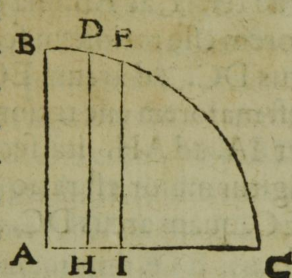
33. huius. 13. 5.

THEO.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXV.

SInus recti duorum arcuum, quorum aut vterque minor est tertia parte Quadrantis, aut alter tertiæ parti Quadrantis æqualis, alter minor; maiorem habent rationem, quam arcus complementorum, si maiores cum minoribus comparentur.

Sit Quadrans ABC. cuius latera AB. AC. centrum A. in eo ſumantur duo arcus inæquales BD. minor DE. maior, ſitq; BD. minor tertia parte Quadrantis, & BE. aut æqualis tertiæ parti Quadrantis aut minor: & ducantur ad oppoſitum latus Quadrantis perpendiculares DH. EI. erit AH. ſinus rectus arcus BD. & AI. ſinus rectus arcus BE. Item erit arcus DC. complementum arcus minoris BD. & EC. complementum arcus maioris BE. arcuumque DE. EC. ſinus verſi HC. IC. Dico maiorem eſſe rationem IA. ad AH. quam arcus DC. ad arcum EC.



Nam ſi BE. ſit tertia pars Quadrantis, erit AI. æqualis ipſi IC. Si vero BE. ſit minor tertia parte Quadrantis erit AI. minor quam IC. ac proinde AH. pars ipſius AI. erit multo minor quam IC. Quoniam igitur IC. maior eſt, quam AH. & addita eſt vtrique quantitas æqualis, imo eadem HI. maior eſt ratio CI. ad AH. quam CH. ad AI. & permutando maior ratio CI. ad CH. quam AH. ad AI. ideoque maior AI. ad AH. quam CH. ad CI. at CH. ſinus verſus arcus DC. ad IC. ſinum verſum arcus EC. maiorem habet rationem quam arcus DC. ad arcum CE. Igitur AI. ad AH. maiorem habet rationem quam arcus DC. ad arcum CE. Quod erat demonſtrandum.

1. huius.

30. huius.

13. 5.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXVI.

SEcantes duorum arcuum inæqualium, quorum aut vterque ſit maior duabus tertijs Quadrantis, aut alter maior, alter æqualis; maiorem habent rationem, quam arcus ad arcum: ſi maiores cum minoribus conferantur.

In figura ſuperioris propoſitionis ſint ſinguli arcus EC. DC. maiores duabus tertijs Quadrantis, erunt tam EB. quam DB. minores vna tertia. Vel ſit. EC. duæ tertiæ erit CD. maior vna tertia, ac EB. vna tertia, BD. minor vna tertia. Dico maiorem eſſe rationem ſecantis DC. ad ſecantem EC. quam arcus DC. ad arcum EC. Nam ſuperiori propoſitione oſtenſum eſt maiorem eſſe rationem IA. ad AH. quam DC. ad EC. ſed vt IA. ad AH. ita ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. Igitur maior eſt ratio ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam arcus DC. ad arcum EC. Quod fuit probandum.

Clau. p. 22. de ſecantibus.

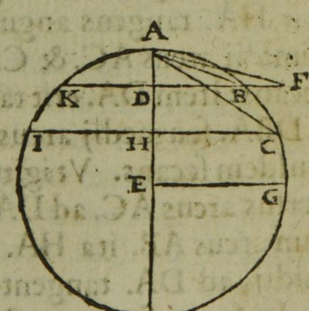
THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXVII.

DVorum arcuum inæqualium, quorum vterque ſit minor Quadrante, aut alter minori differentia Quadrantem excedat, quam alter ab eodem deficit; ſinus verſus maioris, ad ſinum verſum minoris maiorem habet rationem, quam tangens dimidij maioris ad tangentem dimidij minoris; & chorda maioris, ad chordam minoris maiorem habet rationem, quam ſecans dimidij maioris ad ſecantem dimidij minoris. Quod ſi defectus fuerit æqualis, æqualis erit proportio, ſi exceſſus defe-

ctum

ctum superet, aut vterque arcus fuerit maior Quadrante, minor erit proportio eorumdem sinuum versorum inter se, quam tangentium; & chordarum, quam secantium.

IN circulo ABG. cuius centrum E. diameter AE. secans circulum in A. sit arcus maior AC. minor AB. illius chorda AC. huius AB. illius sinus rectus CH. huius BD. secantes diametrum AE. in punctis HD. erit HA. sinus versus maioris arcus AC. & DA. sinus versus arcus minoris AB. sitque primum vteruis arcus minor quadrante. Dico maiorem esse rationem HA. ad AD. quam tangentis dimidij arcus CA. ad tangentem dimidij AB. & maiorem AC. chordæ ad AB chordam, quam secantis dimidij arcus AC. ad secantem dimidij arcus AB. Producatur DB. quantum libet, & accipiatur DF. æqualis sinui HC. qui cum sit maior quam DB. cadet punctum F. vltra B. extra circulum, & connectatur AF. erit angulus ACH. dimidius anguli AEC. id est arcus AC. (productis enim rectis BD. CH. in circumferentiæ puncta K.I. angulus ACI. in sistit arcui AI. qui arcui AC. est æqualis, & Angulus ABD. arcui AK. æquali ipsi AB.) & angulus ABD. dimidius anguli AEB. seu arcus AB. atque in triangulis rectangulis CHA. FDA. posito sinu toto CH. aut FD. illi æquali, erit HA. tangens anguli HCA. id est, medietatis arcus AC. & eius secans CA. Item DA. tangens anguli DFA. & FA. eius secans. Iam vero, quæ proportio HA. sinus versi arcus AC. ad DA. sinum versum arcus AB. eadem est HA. tangentis anguli HCA. ad DA. tangentem anguli DFA. nam vtrobique est proportio æqualitatis: sed angulus AFD. minor est angulo ABD. minor est igitur tangens anguli AFD. tangente anguli ABD. Igitur maior est proportio HA. tãgentis anguli HCA. ad DA. tangentem anguli DFA.

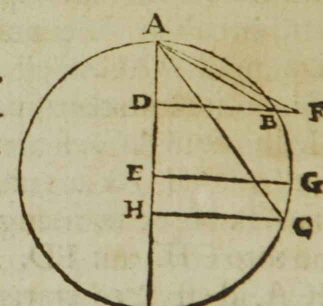


quam

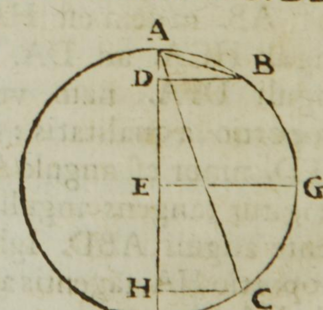
quam ad tangentem anguli DBA. sed vt HA. tangens anguli HCA. id est dimidij arcus AC. ad DA. tangentem anguli DFA. ita ostensus est HA. sinus versus arcus AC. ad DA. sinum versum arcus AB. Igitur maior est proportio HA. sinus versi arcus AC. ad DA. sinum versum arcus AB. quam HC. tangentis anguli HCA. seu medij arcus AC. ad tangentem anguli DBA. seu medij arcus AB.

Sed sit arcus AC. maior quadrante, & ducta EG. perpendiculari ad diametrum AE. minor sit arcus CG. quo quadrantem superat; quam arcus BG. quo arcus AB. differt à Quadrante. Rursus cum sinus HC. sit maior quã DB. cadet punctũ F. vltra punctum B. extra circulum; eodem prorsus modo quo prima parte huius, ostendemus HA. sinum versum Arcus AC. ad AD. sinum versum arcus AB. maiorem habere rationem, quam HA. tangentem medij arcus AC. ad tangentem medij arcus AB.

15.3.



Sit secundò arcus GC. arcui GB. æqualis, ideoque rectæ DB. HC. æquales, cadatque punctum F. in ipsum C. Dico eamdem esse rationem HA. sinus versi arcus AC. ad DA. sinum versum arcus DA. quæ tangentis anguli HCA. id est medij arcus AC. ad tangentem anguli DBA. seu medij arcus AB. Nam cum in triangulis rectangulis æquales sint sinus toti HC. DB. erit HA. tangens anguli HCA seu dimidij arcus AC. & CA. eiusdem secans: item DA. erit tangens anguli DBA. seu medij arcus AB. & AB. eiusdem secans. Vt igitur HA. sinus versus arcus AC. ad DA. sinum versum arcus AB. ita HA. tangens dimidij, ad DA. tangentem dimidij.

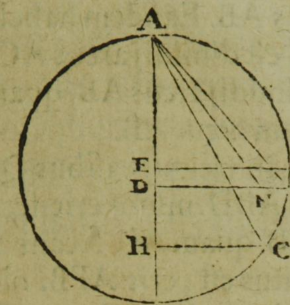


In super sit arcus GC. quo ma-

ior

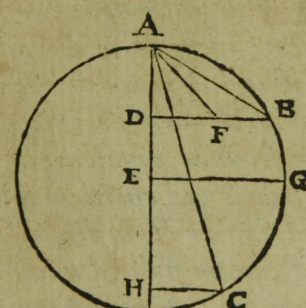
ior arcus quadrantem ſuperat, maior arcu GB. quo minor à Quadrante ſuperatur: erit HC. magis diſtans à diametro, minor quam DB. quæ minus diſtat. Igitur ſumpta DF. æquali ipſi HC. cadet punctum F. inter D. & B. erit rurſus HA. tangens anguli HCA. & DA. tangens anguli DFA. qui cum ſit maior, quam angulus DBA. minor erit ratio tangentis HA. anguli HCA. ad tangentem anguli DFA. quam ad tangentem anguli DBA. ſed vt HA. tangens Anguli HCA. ad tangentem anguli DFA. ita HA. ſinus verſus arcus AC. ad DA. ſinum verſum arcus AB. Igitur HA. tangens anguli HCA. id eſt dimidij arcus AC. ad tangentem anguli DBA. ſeu medij arcus AB. maiorem habet rationem, quam dictus ſinus verſus HA. ad ſinum verſum DA.

15.3.



Denique ſint arcus AB. AC. vterque maior Quadrante: AB. minor & AC. maior: erit recta DB. vicinior diametro maior quam HC. ſumpta igitur DF. æquali ipſi HC. quæ cadat inter puncta D. B eodem rurſus modo quo proxima parte, oſtendemus maiorem eſſe proportionem tangentis dimidij arcus maioris, ad tangentem dimidij minoris, quam ſinus verſi arcus maioris ad ſinum verſum minoris.

15.3.



Iam vero, quoniam in primo caſu maior eſt angulus ABD. angulo AFD. maior erit ſecans anguli ABD. recta AF. ſecante anguli AFD. Rurſus, cum acutus ſit angulus ABD. quia ADB. rectus; obtuſus erit ABF, ideoque AF. maior quam AB. maiorem igitur rationem habebit chorda CA. arcus AC. ad chordam BA. arcus AB. quam ſecans AC. anguli ACH. id eſt dimidij arcus AC. ad ſecantem anguli ABD. ſeu dimidij arcus AB.

1. 16.
32. 1.
13. 1.
19. 1.
8. 5.

In

In ſecundo vero caſu cum CA. ſit & ſecans anguli ACH. & chorda arcus AC. item BA ſecans anguli ABD. & chorda arcus AB. Eandem habebit rationem CA. ſecans Anguli ACH. id eſt dimidij arcus AC. ad BA. ſecantem Anguli ABD. ſeu dimidij arcus AB. quam CA. chorda arcus AC. ad BA. chordam arcus AB.

In vltimis caſibus Quoniam maior eſt angulus AFD. angulo ABD. minor erit ſecans anguli ABD. id eſt dimidij arcus AB. quam AF. ſecans anguli AFD; & quia angulus AFD. acutus eſt, erit AFB. obtuſus, ideoque maior AB. quam AF. Igitur minor eſt ratio CA. chordæ arcus AC. ad BA. chordam arcus AB. quam CA. ſecantis anguli ACH. ſeu dimidij arcus AC. ad ſecantem anguli ABD. ſeu dimidij arcus AB. Igitur duorum arcuum inæqualium &c. Quod erat demonſtrandum.

32.1. 13.1. 19.1. 8.5.

COROLLARIVM.

Ex probatis colligitur, ſi ſinus rectus cum ſecante eiuſdem arcus comparetur, quoad maiorem vel minorem proportionem; idem de eo dicendum, quod de chorda dupli arcus, ac in priori caſu maiorem eſſe rationem ſinus recti arcus maioris ad ſinum rectum minoris, quam ſecantis maioris ad ſecantem minoris: in ſecundo æqualem: in tertio minorem; Nam, vt chorda arcus maioris, ad chordam minoris; ita ſinus rectus dimidij maioris, ad ſinũ rectum dimidij minoris. Cum medietas chordæ nihil aliud ſit, quam ſinus dimidij arcus: ſed in priori caſu, chorda arcus maioris, ad chordam minoris, maiorem habet rationem, quam ſecans dimidij maioris ad ſecantem dimidij minoris: Igitur ſinus dimidij arcus maioris ad ſinum dimidij minoris, maiorem habet rationem, quam ſecans dimidij maioris, id eſt eiuſdem arcus, ad ſecantem dimidij minoris. In ſecundo vero caſu, oſtenditur eſſe vt ſinum maioris arcus ad ſinum minoris, ita ſecantem maioris ad ſecantem minoris. In tertio minorem eſſe rationem ſinus arcus maioris, ad ſinum minoris, quam ſecantis maioris, ad ſecantem minoris.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXVIII.

DVorum arcuum inæqualium, quorum vterq; ſit minor ſemiquadrante, aut alter æquali, vel minori differentia ſemiquadrantem excedat, quam alter à ſemiquadrante deficit; ſecans maioris ad ſecantem minoris minorem habet rationem, quam arcus maior ad minorem.

IN propoſitione 37. huius, tribus primis figuris, ſit arcus AC. maior arcu AB. ita vt vterq; ſit minor quadrante, aut AC. maior AB. minor, ita vt exceſſus AC. ſupra quadrantem ſit aut minor, aut æqualis defectui arcus AB. à quadrante. Dico ſecantem dimidij arcus AC. ad ſecãtem dimidij arcus AB. minorem habere rationem, quam arcum AC. ad arcum AB. Nam ex propoſitione 37. huius conſtat, minorem, aut æqualem eſſe rationem ſecantis dimidij arcus AC. ad ſecantem dimidij arcus AB. quam chordæ AC. ad chordam AB. ſed chorda AC. ad chordam AB. minorem habet rationem quam arcus AC. ad arcum AB. id eſt quam dimidius AC. ad dimidium AB. ergo ſecans dimidij arcus AC. ad ſecantem dimidij arcus AB. minorem habet rationem, quam medius arcus AC. ad medium arcum AB. qui arcus ſecantibus reſpondent. Igitur duorum arcuum &c. quod erat &c.

Cor. 2. 26. huius. 15. 5.

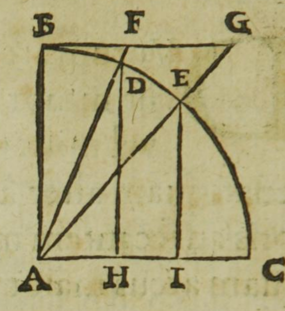
COROLLARIVM.

QVod ſi vterq; arcus ſit minor ſemi quadrante, ſecans maioris ad minorem, non tantum minorem habebit rationem, quam arcus maior ad minorem, ſed etiam quam complementum arcus minoris, ad complementum maioris. Nam in quadrante ABC. ſumantur duo arcus BE. BD. vterq; minor ſemiquadrante, quorum ſecantes AG. AF. in tangentem GB. incurrant, in punctis

G GF.

GF. erit DC. complementum minoris arcus DB. & EC. complementum maioris BE. Dico minorem esse rationem AG. ad AF. quam arcus DC. ad arcum. EC. Ducantur duo sinus complementi DH. EI. minor erit ratio DH. ad EI. quam arcus DC. ad arcum EC. vt autem DH. ad EI. ita AG. ad AF. (hoc enim à Clauio demostratum est propos. 22. de secantibus, & deducitur ex 37. huius) igitur minor est proportio AG. ad AF. quam arcus DC. ad arcum EC.

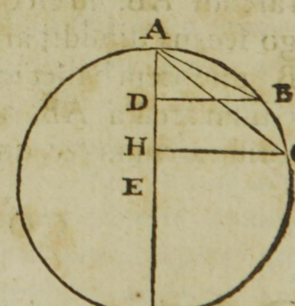
Corol. 1. 26. huius.



THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXIX.

Sinus rectus maioris arcus, ad sinum rectum minoris, minorem habet rationem, quam chorda maioris, ad chordam minoris; & chorda ad chordam minorem rationem, quam sinus versus maioris, ad sinum versum minoris.

IN circulo ABC. sit arcus maior quilibet AC. minor AB. quorum chordæ CA. BA. sinus recti CH. BD. sinus versi HA. DA. Dico minorem esse rationem CH. ad BD. quam CA. ad BA. & minorem CA. ad BA. quam HA. ad DA. Nam in triangulis rectãgulis AHC. ADB. cum maior sit totus angulus BAD. sui parte CAH. erit reliquus angulus ABD. minor angulo ACH. Constat igitur ex 23. huius, minorem esse rationem HC. ad CA. quam DB. ad BA. & permutando, minorem rationem esse HC. ad DB. quam CA. ad BA. Rursus per eandem propositionem, cũ maior sit angulus DAB.



23. huius.

angulo

angulo HAC. minor erit ratio DA. ad AB. quam HA. ad AC. & permutando, & conuertendo, maior ratio HA. ad DA. quam CA. ad BA. ideoq; minor CA. ad BA. quam HA. ad DA. Igitur sinus rectus maioris arcus &c. quod erat probandum.

COROLLARIVM.

Hinc constat sinum rectum dimidij arcus maioris, ad sinum rectum dimidij minoris, minorem habere rationem, quam sinum versum arcus maioris, ad sinum versum minoris. Nam sinus rectus dimidij arcus AC. est medietas chordæ AC. & sinus rectus dimidij arcus AB. est medietas chordæ AB. vt constat ex definitione sinus recti: cum igitur vt tota chorda AC. ad totam AB. ita illius medietas, ad medietatem huius, sitq; proportio chordæ AC. ad chordam AB. minor quam sinus versi HA. ad sinum versum DA. etiam sinus rectus dimidij arcus AC. ad sinum rectum dimidij AB. minor erit ratio, quam HA. ad DA.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XL.

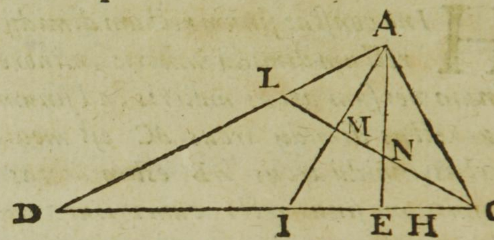
SI trianguli rectanguli rectum angulum perpendicularis in basim demissa secet, & ex punctis, vbi latera basi iunguntur, lateribus ipsis æquales partes ex basi abscindantur; rectæ ex trianguli angulo recto ad puncta sectionis ductæ diuidunt angulos à perpendiculari cum lateribus factos, bifariam.

SIT triangulum GAD. rectangulum ad A. & ex puncto A. demissa AE. perpendicularis in basim DG. secet angulum rectum in angulos DAE. GAE. & ex puncto G. ex basi abscindatur GI. æqualis lateri AI. & ex A. ducatur AI. Dico rectam AI. diuidere angulum DAE. bifariam Diuidatur angulus AGD. bifariam ducta GL. quæ secet. AE. in N. &

5.1. 32.1. 30.Pron. 15.1. 8.6.

AI. in M. Quoniam æqualia ſunt latera GA. GI. in triangulo GAI. ex deſcriptione, æquales erunt anguli GAI. GIA. ſed & ex deſcriptione, æquales ſunt AGM. IGM. æquales igitur ſunt & reliqui. AMG. IMG. atq; ideo recti.

Rurſus cum in triangulis GEN. ANM. Anguli ad verticem N. æquales ſint, & GEN. AMN. recti, æquales erunt & reliqui EGN. NAM. id eſt EAI. cum autem æquales etiam ſint EGA. EAD. ablatis æqualibus EAI. EGN. remanent æquales NGA. IAD. Igitur cum angulus EAI. ſit æqualis angulo EGN. & Angulus IAD. æqualis angulo NGA. ſint autem ex hypotheſi, anguli EGN. NGA. æquales, erunt & anguli EAI. IAD. æquales. Atq; idem etiam oſtenditur, ſi ipſi DA. æqualis ſumatur DH. eodem .n. prorſus modo probabitur, à recta AH. angulum EAG. bifariam diuidi. Igitur ſi trianguli rectanguli angulum rectum &c. Quod erat demonſtrandum.

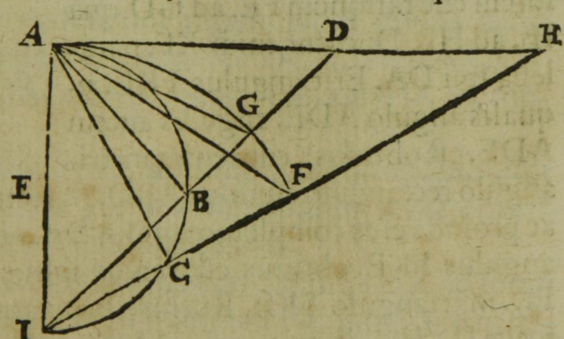


THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XLI.

DIfferentia ſecantis maioris arcus cum ſinu toto, ad differentiam ſecantis minoris, maiorem habet rationem, quam tangens maioris arcus ad tangentem minoris.

IN circulo AGF. cuius centrum. I diameter IA. ſumantur duo arcus inæquales maior AF. minor AG. quorum tangentes. AH. AD. ſecantes IH. ID. & differentiæ ſecantium cum ſinu toto HF. DG. Dico maiorem eſſe rationem AF. ad DG. quam AH. ad AD. diuiſa AI. bifariam in E. centro. E. deſcribatur circulus ABCI. ſecans ſecantes in punctis B. C. & ducantur rectæ AG. AF. AB. AC. Quoniam

niam in triangulis IAH. IAD. rectus est angulus ad A. maiorq; angulus ADI. externus, interno DAI. minor erit ratio AD. ad DI. quam AH. ad HI. & conuertendo maior ratio ID. ad DA. quam IH. ad HA. sed vt ID. ad DA. ita DA. ad DB. & vt IH. ad HA. ita HA. ad HC. (nam cum rectangulum IDB. sit æquale quadrato DA. & rectangulum IHC. Quadrato. HA. erit vt ID. ad DA. ita DA. ad DB. & vt IH. ad HA. ita HA. ad HC.) Igitur maior est ratio AD. ad DB. quam AH. ad HC. & permutando, & conuertendo, minor ratio AH. ad AD. quam HC. ad DB. Rursus cum in triangulo rectangulo IAD. demissa sit ad basim ID. perpendicularis AB. & lateri IA. sit sumpta in basi æqualis IG. diuidet, ex præcedenti, recta AG. angulum DAB. bifariam, atq; eodem modo in triangulo rectangulo IAD. recta AF. diuidet angulum HAC. bifariam. Quare cum in triangulis rectangulis ABD. ACH. angulus CAH. sit maior angulo BAD. maior erit ratio BA. ad AD. quam CA. ad AH. sed vt BA. ad AD. ita BG. ad GD. & vt CA. ad AH. ita CF. ad FH. (nam angulos BAD. CAH. rectæ AG. AF. bifariam diuidunt) igitur maior ratio BG. ad GD. quam CF. ad F. H. & componendo, & permutando maior ratio BD. ad CH. quam DG. ad FH. & conuertendo, minor ratio HC. ad DB. quam FH. ad DG. Cum igitur minor sit ratio AH. ad AD. quam HC. ad DB. vt paulo ante ostensum est, item minor ratio HC. ad DB. quam FH. ad DG. erit etiam ex æqualitate, minor ratio AH. ad AD. quam FH. ad DG. Quod erat demonstrandum.



16.1.
23. huius.
8.6.
36. 3.
17.6.
31.3.
37. huius.
23. huius.
3.6.

COROL-

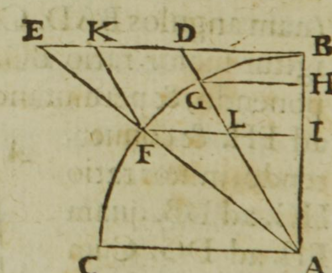
COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, etiam differentiæ ſecantis maioris arcus in ſemicirculo, ad differentiam ſecantis minoris, maiorem eſſe rationem, quam tangentis, arcus maioris, ad tangentem minoris; oſtenſum enim eſt maiorem eſſe rationem CH. ad BD. quam HA. ad DA.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLII.

DIfferentia ſecantis maioris arcus, cum ſinu toto, ad differentiam ſecantis minoris, maiorem habet rationem, quam ſinus verſus maioris arcus, ad ſinum verſum minoris.

IN ſuperiori figura, ſint rurſus ſecantes AE. AD. illa maioris arcus BF. iſta minoris BG. earum differentiæ EF. DG. & ductis ſinibus rectis GH. FI. quorum iſte ſecet AD. in L. ſint eorundem arcuum ſinus verſi IB. HB. Dico maiorem eſſe rationem FE. ad GD. quã IB. ad HB. Ducatur enim KF. parallela ipſi DA. Erit angulus FKE. æqualis angulo ADE. angulus autem ADE. eſt obtuſus (cum enim in triangulo rectangulo angulus ABD. ſit rectus, erit ADB. acutus, ac proinde eius complementum ADE. obtuſus) igitur etiam angulus FKE. obtuſus eſt; maius igitur eſt latus EF. latere FK. in triangulo FKE. Rurſus cum parallelæ ſint lateri BD. rectæ IL. HG. in triangulo ABD. erit vt HI. ad HA. ita GL. ad GA. & vt HA. ad HB. ita GA. ad GD. ergo ex æquali vt HI. ad HB. ita GL. ad GD. & componendo vt IB. ad BH. ita LD. id eſt FK. illi æqualis (eſt enim KDLF. parallelogrammum ex deſcriptione) ad GD. Sed maior oſtenſa eſt FE. quam FK.



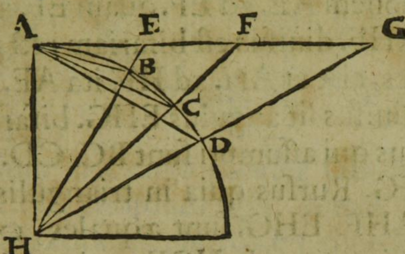
29. 1.
32. 1.
13. 1.
19. 1.
2. 6.
34. 1.

FK. igitur maior ratio eſt FE. ad DG. quam FK. id eſt, LD. ad DG. & IB. ad HB. Quod demonſtrandum erat. 8. 1.

THEOREMA XL. PROPOS. XLIII.

ARcuum continuorum in circulo ſeſe ęquali exceſſu ſuperantium, chordæ inter ſe, ſinus item recti, ſunt in continua proportione minori; ſecantes vero in continua proportione maiori.

IN circulo ABCD. cuius centrum H. & diameter HA. ſint tres arcus æqualiter differentes, ac continui AB. AC. AD. quorum chordę AB. AC. AD. & ſecantes HE. HF. HG. Dico primo minorem eſſe rationem chordæ AD. ad chordam AC. quam chordæ AC. ad chordam AB. In triangulis enim BAC. CAD. æquales ſunt anguli BAC. CAD. æqualibus arcubus BC. CD. inſiſtentes: Angulus vero CDA. maiori arcui CA. inſiſtens erit maior angulo BCA. minori arcui BA. inſiſtente. minor igitur eſt angulus DCA. angulo CEA. Ergo minor eſt ratio BA. ad AC. quam CA. ad AD. vt conſtat ex 25. huius.



27. 3. ſchol. 27. 3. per 32. 1. 25. huius.

Rurſus quoniam ſinus recti dimidij ſunt chordarum, ſint autem chordæ in continua proportione minori, erunt etiam ſinus recti in continua proportione minori. 15. 5.

Denique dico maiorem eſſe rationem ſecantis HA. ad ſecantem HE. quam ſecantis HE. ad ſecantem HF. nam cum in triangulis AHE. EHF. æquales ſint anguli AHE. EHF. maior autem ſit angulus AEH. externus, interno HFE. maior erit ratio AH. ad HE. quam HE. ad HF. Atq; eodem modo oſtendetur maiorem eſſe rationem HE. ad HF. quam HF. ad HG. Quod erat oſtendendum. coroll. 25. huius.

THEO-

THEOREMA XLI. PROPOS. LXIV.

TAngentium differentiæ quibus æquales arcus continui respondent, sunt in continua proportione maiori.

IN figura superioris propositionis, sint tres, aut plures arcus AB. BC. CD. æquales, ac continui; & tangentium differentiæ illis respondentes AE. EF. FG. Dico maiorem esse rationem AE. ad EF. quam EF. ad FG. Nam quoniam angulus AHF. diuisus est bifariam recta HE. ob arcus AB. BC. æquales, erit vt AH. ad HF. ita AE. ad EF. Atq; eodem modo cum diuisus sit angulus EHG. bifariam recta HF. ob æquales arcus qui assumpti sunt BC. CD. erit vt EH. ad HG. ita EF. ad FG. Rursus quia in triangulis AHF. EHG. quorum anguli AHF. EHG. sunt æquales, ex hypothesi, & angulus HFA. minor angulo HGE. maior erit ratio AH. ad HF. quam EH. ad HG. sed vt AH. ad HF. ita ostensum est AE. ad EF. & vt EH. ad HG. ita EF. ad FG. Igitur maior est ratio AE. ad EF. quam EF. ad FG. Quod erat demonstrandum.

3.6.

16.1.

25. huius.

THEOREMA XLII. PROPOS. XLV.

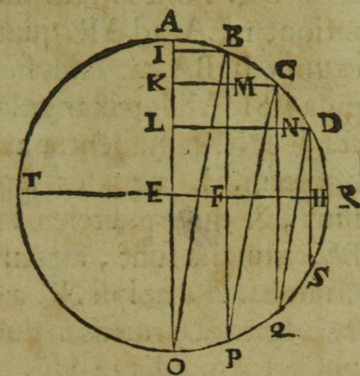
SInuum versorum, ac rectorum differentiæ æqualibus arcubus continuis subtensæ, sunt in continua proportione minori.

IN circulo ABC. cuius centrum E. duæ diametri sese perpendiculariter secent in E. quæ sint AO. TR. & sumantur quotlibet arcus æquales ac continui AB. BC. CD. sintque arcuum AB. AC. AD. sinus recti BI. CK. DL. & sinus complementorum BF. CG. DH. producti in peripheriæ puncta O. P. Q. S. & qui secent sinus in M N. & connectantur OB. PC. QD. erunt EF. FG. GH. sinuum versorum differentiæ. Dico mino-

rem

rem eſſe rationem EF. ad FG. quam FG. ad GH. Quoniam in triangulis rectangulis ad OIB. PMC. QND. æquales ſunt etiam anguli IOB. MPC. NQD. æqualibus arcubus AB. BC. CD. inſiſtentes æquiangula ſunt triangula dicta inter ſe, erit ergo vt OB. ad BI. ita PC. ad CM. & QD. ad DN. & permutando, vt OB. ad PC. ita IB. ad MC. id eſt EF. ad FG. & vt PC. ad QD. ita MC. ad ND. id eſt FG. ad GH. Quoniam vero arcus BRO. CRP. DRQ. ſeſe æquali exceſſu ſuperant, æquales enim ſumpti ſunt arcus AB. BC. CD. tum inter ſe, tum arcubus OP. PQ. QS. minor erit ratio chordæ OB. ad chordam PC. quam chordæ PC. ad chordam QD. Igitur & rectæ EF. FG. GH. quæ eandem rationem cum dictis chordis obtinent, ita ſe habebunt, vt minor ſit ratio EF. ad FG. quam FG. ad GH. Quod fuit probandum.

27. 3.
32. 1.
46.



43. huius.

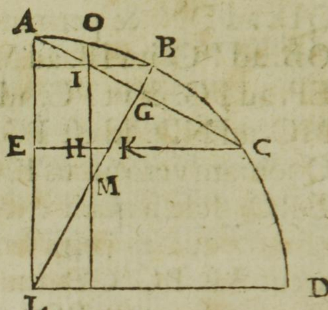
PROBLEMA IIII. PROPOS. XXXXVI.

QVadrantem ita ſecare, vt ſinus verſus maioris arcus, ad ſinum verſum minoris, maiorem habeat rationem, quam tangens maioris, ad tangentem minoris.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum L. latera perpendicularia LA. LD. quorum vnum LA. ita ſecetur, vt pars LE. ſit aut æqualis, aut maior quam EA. & ducatur EC. perpendicularis ad LA. & arcus CA. quem EC. abſcindit ex quadrante, diuidatur bifariam in B. ducaturque arcus BA. ſinus rectus BR. & connectatur chorda AC. ſecans BR. in I. Item ſemidiameter L. B. ſecans CE. in K. & CA. in S. denique per I. ipſi AL. agatur parallela IM. ſecans CE. in H. & LB. in M.

H &

& DL. in N. Constat EA. esse sinum versum arcus CA. & RA. sinum versum arcus BA. Item CE. esse tangentem anguli CLE. idest arcus CA. & KE. tangentem anguli KLE. seu arcus BA. Posito nimirum sinu toto LE. Dico maiorem esse rationem EA. ad AR. quam CE. ad EK. Nam æqualium arcuum CB. BA. æquales sunt sinus versi BS. AR. Igitur triangula BSI. ARI. rectangula ad puncta S. & R. & habentia angulos ad verticem. I. æquales æquiangula sunt, & quia præterea latera AR. BS. æqualia sunt, æqualia etiam erunt SI. IR. at ipsi IR. æqualis est NL. Igitur, cũ rursus in duobus triãgulis rectangulis ad S. N. etiam anguli ad verticem M. sint æquales, & æqualia latera NL. SI. eodem modo, quo paulo ante ostendemus in dictis triangulis latus SM. lateri MN. & basim IM. basi ML. esse æqualem, maior autem ML. quam MN. Igitur maior est IM. quam MN. ac proinde NM. minor quam dimidia ipsius NI. at LE. aut dimidia est, aut maior quam dimidia ipsius LA. quæ multo maior est quam NI. Igitur maior est LE. id est HN. quam MN. cadet igitur punctum M. inter puncta H. N. ac LM. producta secabit CE. in K. inter puncta C. H.; maior igitur est EK. quam EH. Rursum cum in triangulo CEA. recta IH. sit parallella lateri AE. & IR. ipsi HE. ex descriptione erit vt CE. ad EH. id est CA. ad IA. ita EA. sinus versus arcus CA. ad RA. sinum versum arcus BA. sed CE. tangens anguli CLE. ad KE. tangentem anguli KLE. minorem habet rationem quam CE. ad EH. Igitur CE. tangens anguli CLE. seu arcus CA. ad KE. tangentem anguli KLE. seu arcus BA. minorem habet rationem, quam EA. sinus versus arcus CA. ad RA. sinum versum arcus BA. Quod erat, &c.

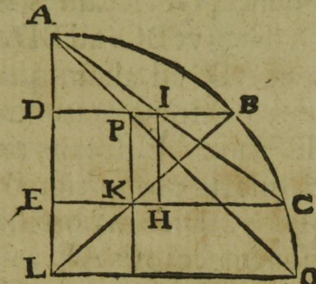


15. 1. 32. 1. 26. 1. 34. 1. 19. 1. 15. 3. 34. 1. 2. & 4. 6. 8. 5. 13. 5.

PROBLEMA V. PROPOS. XXXXVII.

Dato arcu in Quadrante, alium inuenire, ita vt tangens maioris ad tangentem minoris, maiorem habeat rationem, quam ſinus verſus maioris, ad ſinum verſum minoris.

SINVM DB. arcus AB. vtcunque acceptum ſecet chorda quadrantis AO. in P. ex quo puncto P. ipſi AL. parallela PK. ducta ſecet ſemidiametrum LB. in puncto K; & ad AL. ducatur perpendicularis EKC. Dico maiorem eſſe rationem tangentis arcus AC. ad tangentem arcus AB. quam ſinus verſi eiuſdem arcus AC. ad ſinum verſum arcus AB. Ducatur AC. ſecans DB. in I. & ex I. ipſi PK. ſeu AE. parallela agatur IH. ſecans EC. in H. quod quidem punctum I. cadet inter P. & B. cum punctum C. cadat ſupra O. ideoque recta AC. ſupra AO, & punctum H. cadet inter puncta K. & C. erit EA. ſinus verſus arcus AC. & DA. ſinus verſus arcus AB. & CE. tangens anguli ELC. id eſt arcus AC. & EK. tangens anguli ELK. id eſt, arcus AB. Cum igitur parallelæ ſint IH. AE. Item etiam DI. & EH. erit vt CE. ad EH. id eſt CA. ad AI. ita EA. ad AD. ſed CE. ad EH. minorem habet rationem quam CE. ad EK. Igitur EA. ſinus verſus arcus AC. ad DA. ſinum verſum arcus AB. minorem habet rationem, quam CE. tangens anguli ELC. ſeu arcus AC. ad EK. tangentem anguli ELK. ſeu arcus AB. Quod fuit probandum.

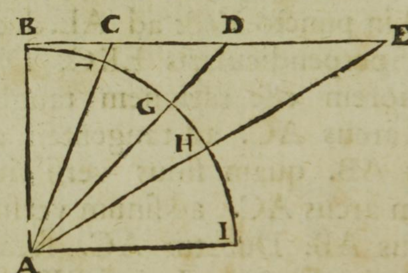


2. & 4. 6. 8. 5.

PROBLEMA VI. PROPOS. XXXXVIII.

QVadrantem ita ſecare, vt ſecans arcus maioris, ad ſecantem minoris, maiorem habeat rationem, quam arcus maior, ad arcum minorem.

QVADRANS ABI. diuidatur bifariam in G. & arcus G. B. rurſus bifariam in F, & ducatur tangens infinita BE. ac per puncta GF. ſecantes AC. AD. fiatq; vt BC. ad BD. ita ſecans AD. ad aliam quampiam, quæ transferatur ex A. in E. ita vt AE. ſecans arcus BH. quartæ proportionali ſit æqualis. Dico maiorem eſſe rationem ſecantis AE. ad ſecantem AD, quam arcus HB. ad arcum BG. maiorem autem eſſe AE. quam AD. & ideo arcum HB. quam GB. conſtat quia BD. maior eſt quam BC. quare cum maior ſit ratio tangentis DB. ad tangentem BC. quam arcus GB. ad arcum BF. maior etiam erit ratio ſecantis AE. ad ſecantem AD, quam arcus GB. ad arcum BF. ſed vt arcus GB. ad BF. arcum, ita arcus IB. ad arcum GB. vtrobique enim maior minoris duplus eſt, & IB. ad BG. maiorem habet rationem quam HB. ad BG. ergo ſecans AE. ad ſecantem AD. maiorem habet rationem quam arcus HB. ad arcum BG. Igitur Quadrantem ità ſecauimus, vt ſecans arcus maioris, &c. Quod erat faciendum.



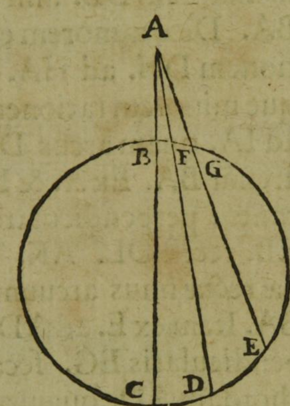
14.5.
26. huius.
13.5.
15.5.
8.5.

THEOREMA XLIII. PROPOS. XLIX.

SI ex puncto diametri productæ extra circulum rectæ ducantur, quæ in conuexam, & cauam peri-

peripheriam incidentes ſemicirculum ſecent, tam ſecantis maioris ad minorem, quam incidentium in conuexam peripheriam maioris ad minorem, minor eſt ratio, quam maioris arcus ex ijs quos abſcindunt, ac ſubtendunt ad minorem.

SIT circulus CDE. in cuius diametro extra circulum producta, ſumatur punctum A. a quo in ſemicirculum CB. ducantur quotlibet rectæ AD. AE. quæ cõuexam peripheriam ſecent in pũctis F. G. concauam in D. E. Dico minorem eſſe rationem AD. ad AE. item AG. ad AF. quam arcus DEF. ad arcum EG. Nam quoniam rectangulum DAF. æquale eſt rectangulo EAG. erit vt DA. ad EA. ita AG. ad AF. Rurſus quoniam chordæ minori EG. additur recta GA. & maiori DF. additur recta FA. minor quam GA. minor erit proportio DA. ad EA. quàm chordæ DF. ad chordam EG. ſed chorda DF. ad chordam EG. minorem habet rationem quam arcus DEF. ad arcum EG. Igitur DA. ad EA. minorem habet rationem, quam arcus DEF. ad arcum EG. Igitur DA. ad EA. minorem habet rationem quam arcus DEF. ad arcum EG. ſed vt DA. ad EA. ita oſtenſum eſt eſſe AG. ad AF. Igitur minor eſt ratio AG. ad AF. quam arcus DEF. ad arcum EG. Igitur ſi ex puncto, &c. Quod erat oſtendendum.



36. 3.

14. 6.

1. huius.

Corol. 2. 28. huius.

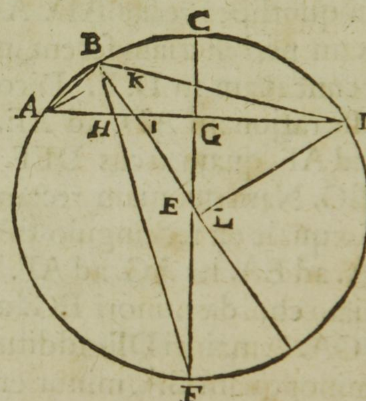
13. 5.

THEOREMA XXXXIV. PROPOS. L.

SI à centro, atque ab extremitate diametri circuli, duæ rectæ ducantur ad idem circumferentiæ

tiæ punctum, quæ chordam, & arcum, cui subtenditur, in partes inæquales diuidant: arcus maior, ad minorem maiorem habet rationem, quam segmentum chordæ maius, ad minus.

SIT circulus ABC. cuius centrum E. diameter FC. ab E. & F. ducantur duæ rectæ FB. EB. ad idem circumferentiæ punctum B. quæ chordam quampiam AD. secent in partes inæquales recta quidem FB. in H. & EB. in I. Item arcum DA. in maiorem DB. minorem BA. Dico minorem esse rationem DH. ad HA. itemque minorem rationem DI. ad IA. quam arcus DB. ad arcum BA. Ex A. & D. ducantur perpendiculares ad EB. rectæ DL. AK. erunt hæ rectæ sinus arcuum BD. BA. Item ex E. ad AD. perpendicularis EG. secans tã chordam AD. quam arcum ACD. & AFD. bifariam in G. C. & F. manifestum est, cum arcus DB. maior sit quam arcus BA. ideoque maior dimidio totius DA. quod punctun B. cadet inter A. & C. ideoque puncta I. & H. inter puncta G. & A. Quare segmentum DI. maius est segmento IA. & DH. maius quam HA. Quoniam æquiangula sunt triangula rectangula DLI. AKI. ob æquales angulos ad verticem I. erit vt DI. ad IA. ita DL. sinus rectus arcus BD. ad AK. sinum rectum arcus AB. sed DL. ad AK. minorem habet rationem quam arcus DB. ad arcum BA. Igitur segmentum DI. ad segmentum IA. minorem habet rationem quam arcus DB. ad arcum BA. Rursus cum duo anguli ABH. DBF. insistant arcubus æqualibus AF. DF. ideoque sint æquales, erit vt DH. ad HA. ita chorda DB. ad chordam BA. at chorda DB. ad chordam BA. minorem habet rationem, quam



schol. 27. 3. & 3. 3.

32. 1.

15. 1.
4. 6.
coroll. 1. 28. huius.

27. 3.
2. 6.
coroll. 2. 28. huius.

arcus

arcus DB. ad arcum BA. Igitur DH. ad HE. minorem habet rationem, quam arcus DB. ad arcum BA. Quod erat, &c.

COROLLARIVM I.

Hinc patet ſi angulus quem duæ ſubtenſæ efficiunt, recta ab externitate diametri ducta diuidatur, bifariam etiam diuidi; nam probatum eſt angulum ABD. bifariam ſecari, à recta FB.

COROLLARIVM II.

Conſtat etiam, ſi in chordam recta ex centro ducatur, quæ chordam, & arcum ſubtenſum diuidat; habere ſegmenta chordæ proportionem eandem, quam ſinus arcuum; Nam demonſtratum eſt, eſſe, vt DI. ad IA; ita DL. ſinum arcus DB. ad AK. ſinum arcus AB.

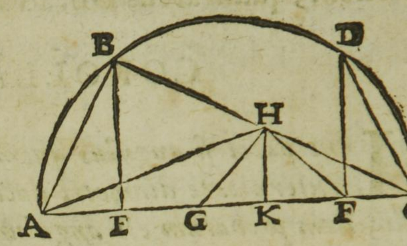
THEOREMA XLV. PROPOS. LI.

SI à puncto in quo diameter circulum ſecat, ex ipſa diametro dematur duplum ſinus recti arcus Quadrante minoris, & ex termino lineæ abſciſſæ alius ſinus rectus ducatur: arcuum inter ſinus, & extremam diametrum interceptorum maior eſt ratio, quam dupli ſinus ad ſinum; minor autem quam dupli ſinus recti, ad ſinum verſum arcus minoris.

IN ſemicirculo ABC. ſumatur arcus AB. à puncto A. in quo diameter AC. circulum ſecat, Quadrante minor, & ducto ſinu recto BE. ipſius BE. à puncto A. ſumatur dupla AF. & ex puncto F. ducatur FD. ſinus rectus arcus DA. Dico maiorem eſſe rationem arcus DA. ad arcum BA. quam rectæ FA. ad

ſinum

ſinum BE. minorem autem quam FA. ſinum verſum arcus DA. ad AE. ſinum verſum arcus AB. connectantur AB. CD. BC. & in chorda BC. ſumatur BH. æqualis ipſi BA. & AE. æqualis EG. & ex H. ducatur ad diametrum AC. perpendicularis HK. & connectantur HA. HG. HF. BD. Quoniam angulus ABH. in ſemicirculo rectus eſt, & rectus etiam HKA. ex hypotheſi, erunt puncta A. B. H. K. in circulo. Igitur anguli BHA. BKA. in eodem ſegmento exiſtentes æquales ſunt, ſed BHA. eſt ſemirectus (nam ſumpta ſunt duo latera BA. BH. æqualia igitur equales anguli BAH. BHA. & ſemirecti cum ABC. in ſemicirculo ſit rectus.) Igitur BKA. eſt ſemirectus, ac proinde cum rectus ſit angulus KEB. ſemirectns eſt KBE. æqualia igitur ſunt latera EK. EB. cum igitur AF. ſit dupla ipſius BE. ex hypotheſi, id eſt, ipſius EK. erit reliquum AE. KF. æquale ipſi EK. Si igitur æqualia demantur AE. EG. remanebunt GK. KF. æquales. Cum igitur duo triangula HKG. HKF. habeant duo latera HKG. HKF. circa angulos rectos æqualia, habebunt & angulos HGK. HFK. æquales, ideoque complementa HGA. HFC. æqualia. Item quia CAE. rectangulum æquale eſt Quadrato AB. (eſt enim vt CA. ad BA. ita BA. ad AE. ideoque proportionales ſunt CA. BA. AE.), & AG. eſt dupla ipſius AE. ex hypotheſi erit rectangulum CAG. duplum Quadrati AB. ſed AH. eſt duplum Quadrati AB. cum ſit æquale Quadratis rectarum AB. BH. quæ ponuntur æquales; igitur rectangulum CAG. æquale eſt Quadrato AH. Quare vt CA. ad AH. ita AH. ad AG. æquiangula igitur ſunt triangula CAH. HAG. Igitur angulus AHG. angulo HCA. eſt æqualis. Cum vero oſtenſi ſint æquales anguli HFC. HGA. erunt reliqui anguli HAG. CHF. æquales, æquiangulum igitur eſt triangulum HFC. triangulo HAG. ſed



31. 3.
coroll. 22. 3.
21. 3.
5. 1.
32. 1.
6. 1.
4. 1.
17. 3.
8. & 4. 6.
1. 6.
47. 1.
6. 6.
17. 6.
32. 1.
26. 1.

trian-

triangulo HAG. ostensum est triangulum CAH. esse æquiangulum, æquiangula igitur sunt triangula ACH. HCF. Igitur vt AC. ad CH. ita CH. ad CF. æquale igitur actu Quadratum HC. rectangulo ACF. sed etiam rectangulum ACF. æquale est Quadrato CD. æqualia igitur sunt Quadrata HC. DC. æquales igitur sunt rectæ HC. DC. Quare cum recta BH. sit sumpta æqualis ipsi BA. & HC. ostensa sit æqualis ipsi CD. erit tota BC. æqualis duabus simul DC. BA. sed CD. DB. maiores sunt quam CB. Igitur sunt etiam maiores quam CD. B . demptæ igitur communi CD. remanebit DB. maior quam BA. Igitur arcus DA. maior est quam vt sit duplex arcus BA. dupla antem est FA. ipsius EB. maior igitur ratio est arcus DA. ad arcum AB. quam rectæ FA. ad rectam EB. Rursus quoniam arcus BA. est Quadrante minor maior erit ratio FA. sinus versi arcus DA. ad AF. sinum versum arcus BA. quam DA. ad BA.

4. 6.
17. 6.
8. & 17. 6.
20. 1.

FINIS LIBRI I.

CVRVI AC RECTI Proportio promota.

LIBER SECVNDVS.

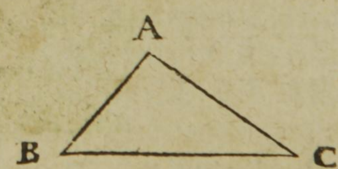
THEOREMA I. PROPOS. I.

IN omni triangulo angulorum inæqualium, maior eſt ratio anguli maioris ad minorem, quam lateris oppoſiti maiori angulo, ad latus oppoſitum minori.

IN triangulo ABC. ſit angulus B. maior angulo C. Dico angulum B. ad angulum C. maiorem habere rationem, quam latus AC. ad latus AB. Nam ea eſt proportio lateris AC. ad latus AB. quæ eſt ſinus recti anguli B. ad ſinum rectum anguli C. At ſinus rectus anguli B. ad ſinum rectum anguli C. minorem habet rationem, quam angulus B. ad angulum C. Igitur latus AC. ad latus AB. minorem habet rationem quam angulus B. ad angulum C. ideoque maior eſt ratio anguli B. ad angulum C. quam AC. ad AB. Quod oſtendere oportebat.

Clauius p. 1. de triangulis rectil.

coroll. 1. 28. 1. huius.

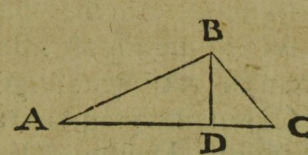


THEO-

THEOREMA II. PROPOS. II.

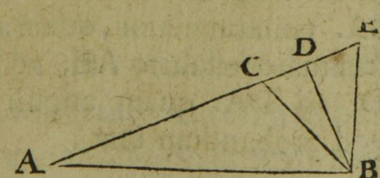
SI ex trianguli angulo, in basim perpendicularis demittatur, ex angulis quos cum lateribus facit, maior ad minorem, minorem habet rationem, quam, aut maius segmentum basis ad minus, aut composita ex basi, & assumpta inter perpendicularem, & basim, ad ipsam assumptam.

SIT triangulum quodcumque ABC. ex cuius angulo B. in basim AC. perpendicularis demittatur AD. quæ cadat primo intra triangulum, faciatque cum lateribus angulus ABD. CBD. sitq; ABD. maior, DBC. minor. Dico maiorem esse rationem AD. ad DC. quam anguli ABD. ad angulum DBC. Vt enim AD. ad DC. ita tangens anguli ABD. ad tangentem anguli DBC. at tangens anguli maioris ABD. ad tangentem minoris DBC. maiorem habet rationem, quam angulus maior ad minorem; Igitur AD. ad DC. maiorem habet rationem, quam angulus ABD. ad angulum DBC.



26.1.huius.

Sit secundo triangulum ABC. obtusangulum ad C. & statuatur AC. basis, in quam productam cadat perpendicularis BD. Dico maiorem esse rationem AD. ad DC. quam anguli DBA. ad angulum CBD. Sumatur enim ipsi DC. æqualis DE. & connectatur DE. Quoniam duo triangula circa angulos rectos ad D. habent latera BD. DC. æqualia lateribus BD. DE. æquiangula erunt, & angulus EBD. erit æqualis angulo DBC. Cum igitur AD. sit

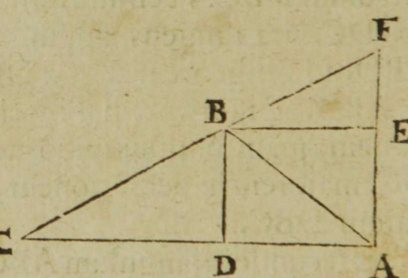


tangens anguli DBA. & DE. tangens anguli DBE. maior erit proportio AD.ad DE.ideſt DC. quam anguli ABD. ad angulum EBD. ideſt CBD. Quod ſecundo oſtendendum erat.

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI ex trianguli angulo, in baſim perpendicularis demitatur, reliquorum angulorum maior ad minorem minorem habet rationem, quam maius ſegmentum ad minus.

SIT triangulum ABC.in quo ab angulo ABC. perpendicularis demittatur BD.quæ cadat intra triangulum, in baſim AC.ſitque angulus BAC. maior angulo BCA. Dico minorem eſſe rationem anguli BAC. ad angulum BCA. quam CD.maioris ſegmenti ad DA.minus. Ducatur AF. parallela ipſi BD. quæ occurrat protractæ CB.in F. & ipſi AC.ſit parallela BE.erit AE. tangens anguli EBA. id eſt anguli BAC. & EF. tangens anguli FBE. id eſt anguli BCA. (poſito nimirum eodem ſinu toto BE.) Et AE. quidem maior erit quam EF. cum angulus BAC. id eſt, EBA. ponatur maior, quam angulus BCA.i d eſt, EBF. igitur maior eſt ratio AE. ad EF. id eſt, CB. ad BF. id eſt, CD. ad DA. quam anguli BAC. ad angulum BCA. Quod probandum erat.



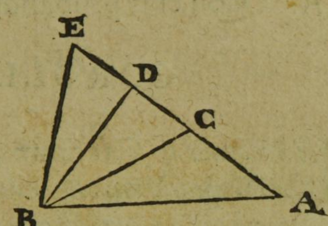
4. & 34. 1.
29. 1.
29.1.
26.1.huius.
2. 6.

THEO-

THEOREMA IIII. PROPOS. IIII.

SI in trianguli obtuſanguli latus ex angulo acuto demiſſa perpendieularis cadat extra triangulum, ſitque anguli obtuſi complementum maius reliquo angulo: maior erit ratio lateris, in quod cadit perpendicularis, cum aſſumpta inter latus & perpendicularem, ad aſſumptam; quam anguli complementi, ad reliquum angulum.

SIT triangulum ABC. obtuſangulum ad C. & in protractum latus AE. cadat perpendicularis BD. & ſumatur DE. æqualis DC. ac connectatur BE. Dico maiorem eſſe rationem AD. ad DC. quam anguli BCD. qui complementum eſt obtuſi ad angulum reliquum BAC. Rurſus enim BED. BCD. anguli ſunt æquales, ob latera BD. DE. æqualia lateribus BD. DC. circa angulum rectum. Igitur, ex præcedenti, maior erit ratio AD. ad DE. id eſt, DC. quàm anguli BEA. id eſt, BCD. ad reliquum angulum BAC.



4. 1.

3. 2. huius.

THEOREMA V. PROPOS. V.

SI trianguli angulum inæqualibus lateribus contentum, bifariam diuidens recta in baſim intra triangulum cadat; ſegmentum maius ad minus, minorem habet rationem, quam reliquorum angulorum maior ad minorem.

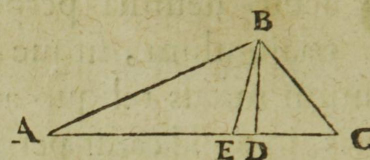
SIT

EX trianguli ABC. angulo ABC. duobus inæqualibus lateribus AB.maiori BC.minori contento, in basim AC. cadat recta BE. quæ angulum ABC. bifariam secet, & basim AC. in E. Cum sit vt AB.latus maius ad BC. minus, ita AE. ad EC. erit AE. maius segmentum, EC. minus, & angulus C.maior, A. minor. Dico minorem esse rationem AE. ad EC. quam anguli C. ad angulum A. Vt enim AE. ad EC.ita AB. ad BC. Sed AB. ad BC. minorem habet rationem quam angulus C. ad angulum A. Igitur AE. ad EC. minorem habet rationem quam angulus C. ad angulum A. Quod erat probandum.

3. 6.

18. 1.

3. 6.
1.2.huius.



COROLLARIVM I.

Hinc constat si ducatur ad basim AC. perpendicularis AD. punctum E. cadere in maius segmentum AD. nam si caderet in punctum D. aut inter D. & C. maior esset proportio AE. ad EC. quàm anguli C. ad angulum A. quod est contra paulo ante demonstrata.

3.2. huius.

COROLLARIVM II.

Colligitur etiam basim AC. in puncto inter E. D. diuidi posse, ita vt eadem sit ratio anguli C. ad angulum A. quæ segmenti maioris ad minus. Non enim in D. aut puncto intra D.& C. nam ibi semper minor est ratio anguli maioris ad angulum minorem, quam segmenti maioris, ad minus, neque in E. aut puncto inter A. & E. nam illic maior est ratio anguli maioris, ad minorem, quam segmenti maioris, ad minus.

COROL-

COROLLARIVM III.

Hinc etiam efficitur si in triangulo, recta ex angulo in basim protractam extra triangulum ducta, efficiat cum viciniori latere angulum, dicto angulo æqualem; maiorem esse rationem maioris angulis adiacentis, ad minorem quam basis, ad intereptam inter basim, & rectam ex angulo ductam. Si enim sit triangulum AEB. in cuius basim AE. protractam, ducatur BC. faciens angulum EBC. angulo EBA. æqualem. minor erit ratio AE. ad EC. quam anguli C. ad angulum A. sed anguli C. ad angulum A. minor est ratio quam anguli AEB. ad eundem angulum A. minor enim est C. internus externo AEB. Igitur minor est ratio AE. ad EC. quam anguli AEB. ad angulum A.

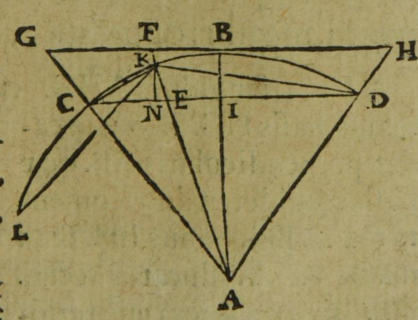
8. 5.
16. 1.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

14. 6.

SI ex trianguli Isoscelis angulo, recta in basim demissa, eam in partes inæquales diuidat; minor erit ratio maioris segmenti ad minus, quam anguli maiori segmento oppositi, ad oppositum minori.

EX trianguli AGH. æqualium angulorum ad G. & H. angulo A. ducatur in basim GH. recta AF. secans eam in partes inæquales HF. maiorem FG. minorem. Dico minorem esse rationem HF. ad FG. quam anguli HAF. ad angulum FAG. Ducatur ex puncto A. in GH. perpendicularis AB. & distantia AB. centro A. describatur circulus secans AH. AF. AC. in punctis DKC. & connectatur DC. KD. & ipsi



KD.

KD. chorde, ſumatur æqualis KL. diuidaturque angulus LKD. bifariam recta AKF. & angulus CKD. bifariam recta FN. cum angulus DKC. maior ſit angulo DKL. erit, & eius medietas DKN. maior medietate DKE. linea igitur KN. cadet inter E. & C. in N. erit igitur CN. minor quam CE. Quare maior erit proportio DN. ad NC. quam DE. ad EC. Sed vt DN. ad NC. ita DK. ad KC. maior igitur ratio eſt DK. ad KC. quam DE. ad EK. eſt autem etiam maior ratio arcus DK. ad arcum KC. quam chordę DK. ad chordam KC. Igitur multo maior ratio erit arcus DK. ad arcum KC. quam DE. ad EC. id eſt quam HF. ad FG. (Nam recta AB. arcum CD. bifariam ſecans ſecat CD. bifariam, quare & ad angulos rectos in I. ſed & recti ſunt poſiti anguli ad B. parallelæ igitur ſunt CD. GH. igitur vt DE. ad EC. ita HF. ad FG.) Quare ſi ex trianguli Iſoſcelis angulo, &c.

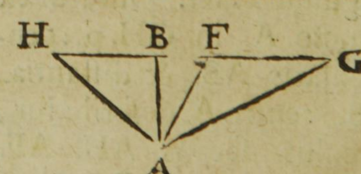
Schol. 27. 3. — 3. 6. — Corol. 2. 28. 1. huius. — Schol. 27. 3. — 3. 3. — Schol. 4. 6.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI ex angulo trianguli inæqualibus lateribus contento in oppoſitam baſim demiſſa perpendicularis intra triangulum cadat, & alia in maius ſegmentum ex eodem angulo ducatur: recta inter ductam, & angulum minorem contenta, ad reliquam partem baſis, maiorem habet rationem, quam angulus oppoſitus, ad reliquum angulum.

SIT triangulum AHG. cuius latus AH. minus AG. maius, baſis HG. in quam cadat perpendicularis AB. quæ baſim diuidet in duo ſegmenta maius BG. minus BH. & in maius ex A. ducatur recta AF. Dico maiorem eſſe ratio-

Schol. 47. 1.



nem

nem GF. ad FH. quam anguli GAF. ad angulum FAH. Quoniam minor eſt HB. tangens anguli HAB. quam BG. tangens anguli BAG. minor erit ratio HB. ad BG. quam anguli HAB. ad angulum BAG. & componendo, minor ratio HG. ad GB. quam HAG. ad BAG. ſed BG. ad GF. minor eſt ratio quam BAG. ad FAG. (cum enim maior ſit ratio tangentis maioris GB. ad minorem BF. quam anguli BAG. ad angulum BAF. erit per conuerſionem rationis minor ratio BG. ad GF. quam BAG. ad FAG.) Igitur ex æquali minor eſt ratio HF. ad FG. quam HAF. ad FAG. & conuertendo maior ratio GF. ad FH. quam anguli GAF. ad angulum FAH. Quod erat &c.

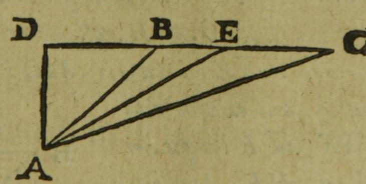
26. 1. huius.

26. 1. huius.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

IN omni triangulo amblygonio, ſi ex angulo acuto in latus protractum, perpendicularis ducatur, & ex eodem angulo oppoſitum latus recta ſecetur; ſegmentum vicinius perpendiculari, ad remotius, minorem habet rationem, quam angulus oppoſitus, ad oppoſitum.

SIT triangulum ABC. amblygonium ad B. in cuius latus protractum CB. ex angulo acuto A. perpendicularis ducatur AD. & ducatur AE. ſecans BC. vtcumque. Dico minorem eſſe rationem ſegmenti BE. vicinioris ipſi AD. ad EC. remotius quam anguli BAE. ad angulum EAC.



ſunt enim BE. EC. differentiæ tangentium CD. ED. BD. eſtque EC. remotior à puncto contactus D. quam BE. Igitur minor eſt ratio BE. ad EC. quam anguli BAE. ad angulum EAC. Quod erat probandum.

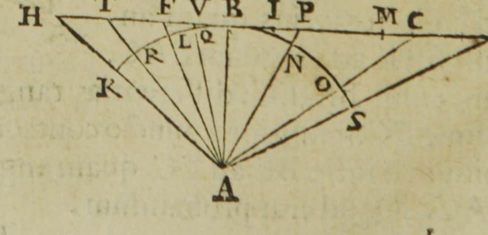
27. 1. huius.

COROLLARIVM.

Eodem modo ostenditur si ex trianguli rectanguli angulo acuto, recta in oppositum latus ducatur; minorem esse rationem segmenti vicinioris perpendiculari, ad remotius quam anguli oppositi viciniori segmento, ad oppositum remotiori. In triangulo enim rectangulo ADE. Ducta vtcumque AB. minor est ratio DB. ad BE. quam anguli DAB. ad angulum BAE.

SCHOLIVM.

Apposuimus in propositione septima huius hanc conditionem, vt ducta AF. cadat in maius segmentum BG. quia si caderet in minus HB. posset contingere vt proportio HF. ad FG. modo esset minor, modo maior, quam anguli oppositi ad oppositum. Ducatur enim in minus segmentum HB. recta AF. secans arcum KB. bifariam in L. & rectæ HF. accipiatur æqualis FI. IM. MG. & arcus BN. NO. sint æquales ipsis KL. LB. Erit HF. maior quam FB. maior enim est ratio HF. ad FB. quam KL. ad LB. æqualis autem est KL. ipsi LB. igitur maior est HF. quam FB. & CP. quam CB. Cum igitur tangentium differentiæ respondentes arcubus KL. LB. BN. NO. componentes rectam HC. duæ sint æquales ipsi HF. videlicet HF. PC. duæ minores FB. BP. componentes vero HG. sint omnes æquales ipsi HF. erit tota HG. maior toti HC. Igitur punctum O. cadet inter S. & K. & punctum C. inter G. & H. ducatur AG. secans circulum in S. Cum sit vt OK. ad KL. ita GH. ad HF. vtrobique enim ratio est quadrupla, erit maior ratio SK. ad KL. quam GH. ad HF. Ita inter puncta H. F. accipiatur punctum T. ad quod ex centro ducatur AT. secans cir-



culum in R. Quoniam GH. ad HF. minorem habet rationem quam SK. ad KL. & HF. ad HT. minorem quam LK. ad KR. erit ex æquali minor ratio GH. ad HT. quam SK. ad KR. Rursus cum sit minor ratio SB. ad BK. quam GB. ad BH. & componendo minor ratio SK. ad KB. quam GH. ad HB. erit eadem ad minorem, sit vt GH. ad HB. ita SK. ad KQ. & ducatur AQV. Quoniam maior est ratio GH. ad HV. quam GH. ad HB. vt autem GH. ad HB. ita SK. ad KQ. maior erit ratio GH. ad HV. quam SK. ad KQ.

8.huius.

26.1.huius.

8.5.
8.5.

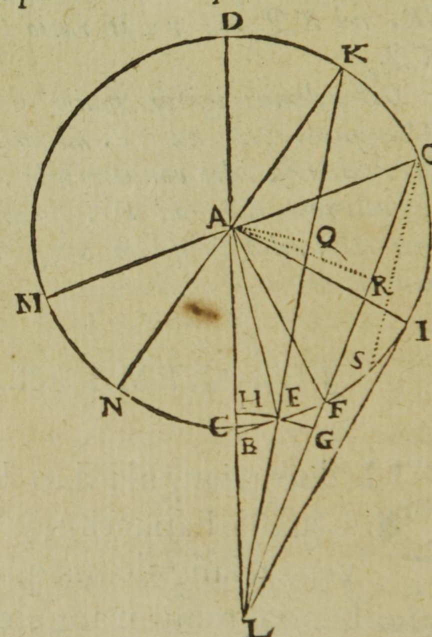
Ostendimus igitur maiorem posse esse rationem SK. ad KL. quam GH. ad HF. minorem autem SK. ad KQ. quam GH. ad HV. ideo conuertendo, & diuidendo, maiorem esse rationem HF. ad FG. quam KL. ad LG. minorem autem HV. ad VG. quam KQ. ad QS. quod ostendere volebamus.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum dictis lateribus contentum angulo inæqualem: maior angulus compræhensus, ad vtrumlibet reliquorum maiorem habet rationem, quam minor comprehensus, ad reliquos, si maiores vnique trianguli cum maioribus, & minores cum minoribus comparentur.

Sint duo triangula LAF. LAE. quæ duo latera LA. AF. duobus lateribus. LA. AE. æqualia habeant, sit vero. LA. maius tam latere. AF. quam AE. & angulus LAF. æquali-

bus lateribus compræhensus, maior angulo LAE. æqualibus item comprehenso. Dico maiorem esse rationem anguli FAL. ad angulum FLA. quam EAL. ad ELA. Item maiorem esse rationem anguli FAL. ad AFL. quàm EAL. ad AEL. Componantur duo latera maiora in vnam lineam rectam AL. & per reliqua duo AE. AF. æqualia, centro A. describatur circulus CEF. secans AL. in C. ductaq; recta LI. tangat circulum in I. ac primo cadant puncta EF. inter C. & I. Item centro L. distantia LE. describatur circulus HEG. secans AL. in H. & LF. in G. & per puncta FE. ducatur FB. secans AL. in B.) Secabit autem, cum angulus. LAF. recto minor sit, nam cum rectus sit LIA. erit LAI. ac multo magis eius pars LAF. acutus, & in triangulo Isosceles AFE. angulus ad basim AFE. acutus; quare angulis AFB. FAB. existentibus minoribus duobus rectis, concurrent AB. FB. ad partes B.) maior erit ratio sectoris AFE. ad triangulum AEB. quam trianguli AFE. ad idem triangulum AEB. sed sector AFE. ad sectorem AEC. adhuc maiorem habet rationem, quàm ad triangulum AEB. igitur sector AFE. ad sectorem AEC. id est arcus FE. ad arcum EC. maiorem habet rationem, quàm triangulum AFE. ad triangulum AEB. id est, quam FE. ad EB. & conuertendo, minor est ratio arcus CE. ad arcum CF. quàm BE. ad EF. Eodem prorsus modo ostendemus, maiorem esse rationem sectoris HLE. ad sectorem ELG. id est arcus HE. ad arcum



32.1. 13.Pron. 8. 5. 8. 5. 33. 6. 1.6.

EG.

EG. quam trianguli BLE. ad triangulum ELF. id eſt, quàm BE. ad EF. quare minor erit ratio BE. ad EF. quàm arcus HE. ad arcum EG. cùm ergo minor ſit proportio CE. ad EF. quam rectæ BE. ad rectam EF. & BE. ad EF. minor quàm arcus HE. ad arcum EG. erit ex æquali, minor ratio arcus CE. ad EF. id eſt, anguli LAE. ad EAF. quàm arcus HE. ad EG. id eſt anguli ALE. ad angulum ELF. & permutando, conuertendo, ac componendo, maior erit ratio FAL. ad FLA. quàm EAL. ad ELA.

33. 6.

Quod vero maior ſit ratio FAL. ad AFL. quam EAL. ad AEL. Ita oſtenditur. Quoniam maior eſt angulus LEA. angulo LFA. & minor angulus EAL. angulo FAL. maior erit ratio LEA. ad EAL. quàm LFA. ad FAL. ergo maior ratio FAL. ad LFA. quam EAL. ad LEA.

Cor. 26. 5.

Idem oſtenditur ſi alterum horum punctorum cadat in punctum contactus I.

Cadant ſecundò puncta. E.F. ſupra punctũ contactus I. in puncta K.O. habeantq; duo triangula KAL. OAL. duo latera KAL. OAL. æqualia, & ſit angulus KAL. maior angulo OAL. ſecentq; baſes LK. LO. circulũ in punctis E. F. inter puncta G. I. Conſtat angulũ KAL. eſſe maiorẽ angulo OAL. & angulum OLA. maiorem angulo KLA. totũ parte: ſed & angulus LOA. maior eſt angulo LKA. (cum enim angulus KAE. maior ſit angulo OAF. erunt reliqui duo. AKE. AEK. reliquis duobus AOF. AFO. minores, ideoque dimidium AKE. dimidio AOF. minus.) Igitur rurſus maior erit ratio anguli KAL. ad angulum ALK. quàm OAL. ad ALO. item maior ratio KAL. ad AKL. quàm OAL. ad AOL.

32. 1.

Idem probabimus, ſi altera dictarum linearum tranſeat per punctum I. Cum manifeſtum ſit angulum LAI. eſſe partem cuiuslibet angulorum ſuperiorum ad A. & angulum LIA. rectum eſſe maiorem acutis AKL. AOL. deniq; ALI. eſſe maiorem ſingulis ALE. ALF.

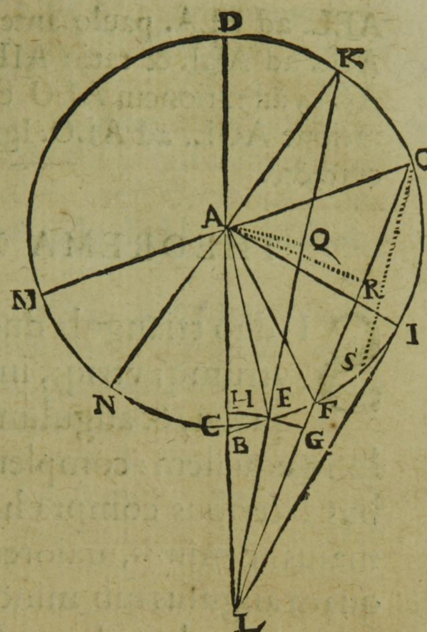
Deni-

Denique secet altera basium dictorum triangulorum, circulum in puncto O. supra punctum contactus I. altera infra, sit in puncto E. habeantq; rursus triangula OAL. EAL. duo latera OA. AL. duobus lateribus EA. AL. æqualia, & sit angulus OAL. maior angulo EAL. Quoniam ex prima parte huius maior est ratio anguli OAL. ad ALO. quam IAL. ad ALI. & IAL. ad ALI. maior, quàm FAL. ad ELA. ex prima parte huius propositionis, maior erit ratio OAL. ad ALO. quam EAL. ad ELA. item quia maior ratio OAL. ad AOL. quam IAL. ad AIL. & IAL. ad AIL. maior, quàm EAL. ad AEL. erit OAL. ad AOL. maior ratio, quã EAL. ad AEL. Quare si duo triangula &c. Quod erat demostrandum.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs comprehensum angulo inæqualem. In triangulo in quo angulus compræhensus minor est, reliquorum angulorum maior ad minorem, maiorem habet rationem, quam in altero.

Sint duo triangula LAO. LAK. eodem modo disposita, quo superiori propositione, & sit angulus LAK. compræhensus maior angulo compræhenso OAL. Dico in triangulo. LAO. angulum AOL. maiorem, ad angulum OLA. minorem, maiorem habere rationem, quam in triangulo LAK. angulum maiorem AKL. ad angulum minorẽ ALK. Cadat primo vterq; angulus. O. K. supra punctum contactus I. & secent rectæ LK. LO. conuexam peripheriam in punctis E. F. & ducantur ex centro A. rectæ AE. AF. Quoniam



aiam maior est ratio anguli FAL. ad angulum FLA. quam EAL. ad ELA. (ex prima parte præcedentis propositionis) erit componendo maior ratio angulorum FAL. FLA. ad angulum FLA. quam angulorum EAL. ELA. ad ELA. sed angulis FAL. FLA. simul est æqualis angulus externus. AFO. id est AOF. & angulis EAL. ELA. simul æqualis est angulus externus AEK. id est AKE. Igitur maior est ratio anguli AOF. seu AOL. ad angulum ALO. quam anguli AKE. id est, AKL. ad angulum ALK.

9.2.huius.

32. 1.

5. 1.

Idem eodem ferme modo demonstrabitur si alterutrum punctorum vt F. cadat in punctum contactus. I. Cum enim superiori propositione probata sit maior ratio IAL. ad ILA. quam EAL. ad ELA. erit componendo maior ratio duorum IAL. ILA. simul, id est anguli AIL. (qui rectus est, ideoq; æqualis duobus reliquis IAL. ILA.) ad ILA. quàm duorum EAL. ELA. simul, id est externi AEK. ac proinde æqualis AKL. ad KLA.

9.2. huius.

Cadat secundo vtrumque punctum E. F. sub punctum contactus I. cum angulus LEA. sit maior angulo LFA. & angulus ELA. minor angulo FLA. maior erit ratio anguli LEA. ad angulum ELA. quam anguli LFA. ad angulum FLA. Neque aliter procedet demonstratio, si punctum F. cadat in punctum contactus I.

21. 1.

Denique cadat alteruter angulorum supra punctum contactus, & alter E. infra, ille minor, hic maior: cum ratio

AEL. ad ELA. paulo ante ostensa sit maior quam ratio AIL. ad ALI. & ratio AIL. ad ALI. maior, quam ratio AOL. ad rationem ALO. erit ratio AEL. ad ELA. maior ratione AOL. ad ALO. Igitur si duo triangula. &c. Quod erat. &c.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI duo triangula duo latera æqualia habueriut, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs compræhensum angulo inæqualem: complementa angulorum æqualibus lateribus compræhensorum, ad duos rectos, maius ad minus, maiorem quidem rationem habēt, quam angulus sub minori basi, & maiori latere in vno triangulo, ad angulum sub maiori basi & maiori latere in altero triangulo, minorem vero, quam angulus sub minori basi, & minori latere in vno triangulo, ad angulum sub maiori basi, & minori latere in altero triangulo.

Ijsdem positis, quæ superioribus propositionibus secet diameter BD. circulum in D. erunt KAD. OAD. complementa angulorum æqualibus lateribus compræhensorum KAL. OAL. ad duos rectos, & angulus OLA. contentus minori basium OL. & maiori laterum LA. Angulus KLA. contentus maiori basium LK. & maiori laterum LA. Angulus autem LOA. contentus minori basium LO. & minori laterum AO. & angulus LKA. contentus maiori basium LK. & minori laterum KA. Dico primo, angulum OAD. ad angulum KAD. maiorem habere rationem quam OLA. ad KLA. minorem quam LOA. ad LKA. Nam cum maior sit

13. 1.

10. 2. huius.

ratio

ratio AOL.ad ALO. quam AKL.ad ALK. erit componendo maior ratio vtriusque AOL. ALO. simul id est ipsius DAO. externi illis æqualis, ad ALO. quam AKL. ALK. simul, id est ipsius DAK. ad ALK. Rursus cum minor sit ratio OLA. ad LOA. quam KLA. ad AKL. erit componendo minor ratio vtriusque OLA. LOA. idest DAO. ad LOA. quam vtriusque KLA. AKL. idest ipsius DAK. ad AKL. & permutando.

32. 1.

10. 2. huius.

Sint secundo triangula AFL. AEL. in quibus complementa angulorum æqualibus lateribus comprȩhensorum, sint EAD. FAD. & angulus ELA. contentus minori basium EL. & maiori latere LA. angulus autem FLA. contentus maiori basium FL. & maiori latere LA. Rursus angulus LEA. contentus minori basium LE. & minori laterũ EA. & angulus LFA. contentus maiori basium LF. & minori latere FA. Dico angulũ EAD. ad angulũ FAD. minorem habere rationem quam angulum LEA. ad angulum LFA. maiorem verò quam ELA. ad FLA. Nam cum maior sit angulus AEL. angulo AFL. si vtrique addantur anguli, illi quidem minor ELA. isti maior FLA. maior erit ratio anguli AEL. ad angulum AFL. quam duorum AEL. ALE. simul, ad duos AFL. ALF. simul. Sed duobus AEL. ALE. simul æqualis est angulus externus EAD. & duobus itidem AFL. ALF. æqualis est externus FAD. Igitur maior est ratio AEL. ad AFL. quam EAD. ad FAD. ideoque minor EAD. ad FAD. quam AEL. ad AFL. Quod verò maior sit ratio EAD. ad FAD. quam ELA. ad FLA. patet, quia illic est ratio maioris inæqualitatis, hic vero minoris. Idem ostendetur in omnibus casibus in quibus triangulum AEL. cadet intra triangulum, vt intra triangula AOL. AKL. nam eodem modo probabimus maiorem esse rationem AEL. ad AOL. aut AKL. quam EAD. ad OAD. vel KAD.

21. 1.

6. 1. primi huius.

32. 1.

Sed sint tertio triangula AEL. LKA. secetque LK. ipsam AF. Dico minorem esse rationem FAD. ad KAD. quam AFL. ad AKL. maiorem vero quam FLA. ad KLA. Nam

L ex

ex secunda parte huius, maior est ratio AFL. ad AOL. quam FAD. ad OAD. & ex prima parte huius, maior est ratio AOL. ad AKL. quam OAD. ad KAD. Igitur ex æqualitate, maior est ratio AFL. ad AKL. quam FAD. ad KAD. ideoque minor FAD. ad KAD. quam AFL. ad AKL. Denique cum maior sit ratio OAD. ad KAD. quam FLA. ad KLA. vt constat ex prima parte huius propositionis, at vero multo maior sit ratio FAD. ad KAD. quam OAD. ad KAD. manifestum est maiorem esse rationem FAD. ad KAD. quam FLA. ad KLA. Quod tandem demonstrandum fuerat.

8. 5.

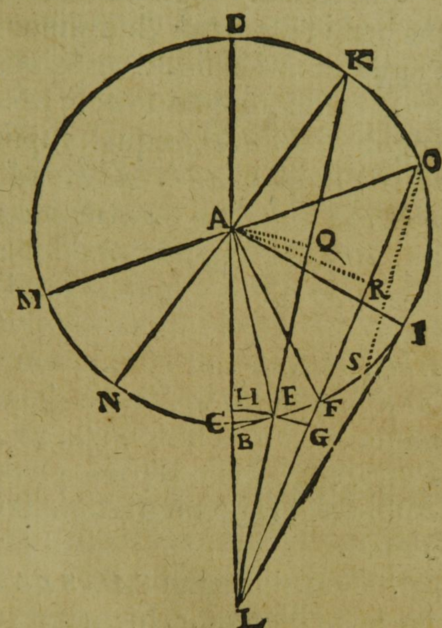
THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs compræhensum angulo inæqualem: anguli æqualibus lateribus compræhensi, maior ad minorem, maiorem habent rationem, quam habeat complementum anguli sub maiori basi, & minori latere contenti, ad duos rectos, in vno triangulo, ad complementum anguli sub minori basi, & minori latere in altero triãgulo.

SINT eadem quæ superioribus propositionibus, sintque anguli KAL. OAL. æqualibus lateribur compræhensi, ille maior, hic minor: & sit primo LOA angulus contentus minori base LO. & minori latere AO. Item angulus LKA. sub maiori basi LA. & minori latere AK. erit angulus AFO. æqualis angulo AOF. & angulus AEK. æqualis angulo AKE. Angulorum autem AFO. AEO. complementa ad duos rectos sunt AFL. AEL. Igitur angulorum AOL. AKL. com-

8. 3.
18. def. & 5. 1.
13. 1.

complementa ad duos rectos sunt AFL. AEL. Dico maiorem esse rationem anguli KAL. ad angulum OAL. quam anguli AEL. ad angulum AFL. productis enim OAM. KAM. maior erit angulus externus OAD. angulo interno LOA. Item KAD. maior, quam LKA. & LOA. quã LKA. ille enim maiori arcui MF. insistit, hic minori NE. & arcus OK. differentia angulorum OAD. KAD. maior quã differentia angulorum LOA. LKA. (Nam eorum differentia est medietas arcus MN. seu KO. & medietas arcus EF. qui minor est quam KO. vt constat si ducatur ipsi *K*L. parallela OS. erit enim EF. minor quã ES. quæ æqualis est ipsi *K*O. quare etiam medietas ipsius EF. erit minor medietate reliqua ipsius *KO*:) Quare si per 14. primi huius, statuantur duo recti prima quantitas, & duo itidem recti secunda quantitas, tertia autem quantitas sit angulus *OAD*. quarta *KAD*. quinta *LOA*. id est *AFO*. & sexta *LKA*. seu *AEK*. ac ex prima quantitate, nempe ex duobus rectis, auferantur anguli *OAD*. *KAD*. ex secunda autem, nimirum ex duobus rectis, demantur anguli *AFO*. *AEO*. cum angulus *OAD*. sit maior angulis *KAD*. *AFO*. & *AFO*. maior quam *AEK*. & differentia angulorum OAD. *KAD*. maior differentia angulorum *AFO*. *AEO*. erit ex dicta propositione 14. 1. huius ratio anguli *KAL*. (qui complementum est quartæ quantitatis *KAD*. ad duos rectos) ad angulum



14. 1. huius.

OAL. (qui est complementum tertiæ quantitatis *OAD.*) maior quam anguli *AEL.* (complementi sextæ quantitatis *AEK.*) ad angulum *AFL.* qui est complementum quintæ quantitatis AFO. Quod primo probandum erat.

Sint secundo anguli *LAF. LAE.* æqualibus lateribus cõpræhensi, ille maior, hic minor, & sit *LEA.* angulus contentus minori basi LE. & minori latere *EA.* Item angulus *LFA.* contentus maiori base LF. & latere minori *FA.* erunt anguli *AEK. AFO.*(æquales ipsis *AKE.AOF.*) complementa angulorum *AEL. AFL.* ad duos rectos. Dico anguli *FAL.* ad angulum *EAL.* maiorem esse rationem, quam anguli *AOL.* ad angulum *AKL* Nam cum probata sit 9. huius, minor ratio anguli *ALF.* ad *FAL.* quam *ELA.* ad *EAL.* erit componendo minor ratio vtriusque *A*LF. *FAL.* id est *AFO*: seu *AOL.* ad *FAL.* quam vtriusque *ELA. EAL.* id est *AEK.* id est. *AKE.* ad *EAL.* Quare conuertendo & permutando, maior est ratio *FAL.* ad *EAL.* quam *AOL.* ad *AKL.* Poterat hæc secunda pars ex principijs primæ partis huius deduci, sed vt breuitati consuleremus, eam aliunde de duximus.

8. 3.
13. 1. 15. def. & 5. 1.
9. 2. huius.
32. 1. & 5. 1.

Sint tertio anguli *FAL. KAL.* æqualibus lateribus compræhensi ille minor, hic maior; cadantque puncta *F. K.* illud sub punctum contactus, hoc supra, & sit *LFA.* angulus contentus sub basi minori LF. & minori latere *FA.* item angulus *LKA.* contentus sub basi maiori LK. & latere minori *KA.* Erit angulus *FAD.* complementum anguli *FA*L. ad duos rectos, & angulus *KAD.* complementũ anguli *AKL.* ad duos rectos minus complemento ipso *FAD.* vt pote pars toto, quorum differentia est angulus *KAF.* quæ maior est differentia angulorum *LFA.* & *LKA.* Nam ex prima parte huius propositionis constat, differentiam angulorum MOF. NKE. nimirum medietates arcuum MN. EF. esse minorem angulo *KAO.* Rursus angulus *LFA.* æqualis est duobus internis *FOA. FAO.* id est arcui OF. & dimidio arcui FM. & angulus NKE. dimidio arccui NE. Quare diffe-

20. 3.

rentia

rentia angulorum *LFA* & *LKA*. id est EKN. erit totus arcus OF. vna cum medietate arcuum MN.EF. Sed medietas arcuum MN. EF. minor est angulo *KAO*. id est arcu *K*O. Igitur si communis addatur arcus OF. erit arcus *K*F. maior arcu OF. vna cum medietate arcuum MN. EF. at vero arcus *KF* est differentia angulorum *FAD*. *KAD*. & arcus OF. vna cum medietate arcuum MN. EF. est differentia angulorum LFA. L*K*A. Igitur maior est differentia angulorum FAD. & *K*AD.quam angulorum LFA. L*K*A. Quare rursus si per 14. primi huius statuantur duo recti prima quantitas, & duo itidem recti secunda quantitas, tertia autem quantitas sit angulus FAD. quarta *K*AD. quinta LFA. sexta LKA. ac ex prima quantitate, nempe ex duobus rectis auferantur tertia FAD. & quarta *KAD*. ex secunda autem, videlicet ex duobus rectis demantur quinta LFA.& sexta LKA. sitque FAD.maior quam LFA.& quam KAD.& LFA. maior quã LKA. (Nam LFA. maior est quam LOA. & LOA. maior quam LKA. vt supra ostensum est) & differentia angulorum FAD.KAD. maior differentia angulorum LFA. LKA. erit ex dicta propositione 14. primi huius maior ratio anguli KAL. ad angulum FAL. videlicet complementi quartæ KAD. ad complementum tertiæ FAD. quam complementi anguli *LKA*.qui sexta quantitas est, ad complementum anguli *LFA*. qui quinta quantitas, positus est. Atque ita in quolibet alio situ ostendemus, quod propositum est. Quare si duo triangula &c. Quod fuit demonstrandum &c.

16. & 6.1. pronunc.

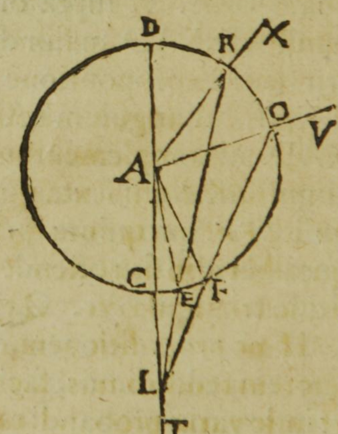
14.1.huius.

Hanc propositionem, etiam in sequenti, quam multo ampliorem reddidimus, facilius, ac breuius demonstrabimus, vt inde variæ probandi rationes, in vna, ac eadem materia, elucescant, quod à veteribus Geometris, ac Pappo præsersertim, in collectionibus mathematicis, factitatum legimus.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs comprehensum angulo inæqualem: anguli æqualibus lateribus compræhensi, maior ad minorem, maiorem habent rationem, quam complementa angulorum reliquorum ad duos rectos si basibus, ac maiori laterum; item basibus ac minori laterum contenti, maioresque cum minoribus conferantur.

IN figura nonæ huius, habeant duo triangula LAK. LAO. duo latera LA. AK. duobus LA. AO. æqualia vtrumq; vtrique, & angulus compræhensus LAK. maior sit compræhenso LAO. Dico maiorem esse rationem anguli LAK. ad angulum LAO. quam complementi anguli AKL. ad duos rectos, ad complementum anguli AOL. Item quam complementi anguli ALK. ad complementum anguli ALO. producantur AL. in T. AO. in V. AK. in X. erunt anguli TLK. TLO. complementa angulorum ALK. ALO. ad duos rectos, & anguli XKL. VOL. complementa angulorum AKL. AOL. Quoniam maior est ratio anguli LAK. ad angulum AKL. quam anguli LAO. ad angulum AOL. erit componendo, & permutando maior ratio angulorum LAK. AKL. simul ad angulos LAO. AOL. simul, quam anguli



13. 1.

9. 2. huius.

AKL.

AKL. ad angulum AOL. Quare cum maior ſit ratio totius LAK.AKL.ſimul,ad totum LAO.AOL. ſimul,quam partis AKL. ad partem AOL. etiam reliqui LAK. ad reliquum LAO.maior erit ratio,quam totius LAK.AKL.ſimul,ad totum LAO.AOL.ſimul:ipſis autem LAK.AKL.ſimul æqualis eſt externus TLK. & ipſis LAO. AOL. ſimul æqualis eſt externus TLO. Igitur maior eſt ratio anguli LAK. ad angulum LAO.quam anguli TLK.ad angulum TLO. Rurſus quoniam maior eſt ratio anguli LAK. ad angulum ALK. quam anguli LAO.ad angulum ALO.vt conſtat ex nona ſecundi huius,erit componendo, & permutando, maior ratio LAK. ALK. ſimul ad LAO. ALO. ſimul quã ALK.ad ALO. ideoque cum maior ſit ratio totius LAK. ALK. ad totum LAO.ALO.ſimul,quam partis ALK. ad partem ALO. etiã reliqui LAK. ad reliquum LAO. maior erit ratio quam totius LKA. AKL. ad totum LAO. ALO. ſed toti *LAK*. *ALK*. eſt æqualis angulus XKL.& toti LAO.ALO.æqualis eſt angulus VOL. Igitur anguli *LAK*. ad angulum LAO. maior eſt ratio quam anguli XKL. ad angulum VOL.

33. 5.

32. 1.

9. 2. huius.

32. 5.

12. 1.

Idem, eodem prorſus modo, demonſtrabitur in duobus triangulis quocumque ſitu collocatis; vt in triangulis LAE. LAF.item in triangulis LAO.LAE. Eadem enim vbique demonſtrandi forma, propoſitum efficiemus, vt inducenti manifeſtiſſime patet. Quare ſi duo triangula duo latera æqualia habuerint &c. Quod fuit demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Quod ſi anguli comprahenſi ſint ſuis complementis ad idem punctum maiores, minor erit ratio angulorum comprahenſorum, quam ſuorum complementorum, ſi minores, maior, ex 22. primi huius: Vt minor eſt ratio LAK. ad LAO. quam DAO. ad DAK. maior vero ratio, LAF. ad LAE. in triangulis LAF. LAE. quam EAD. ad FAD.

THEO-

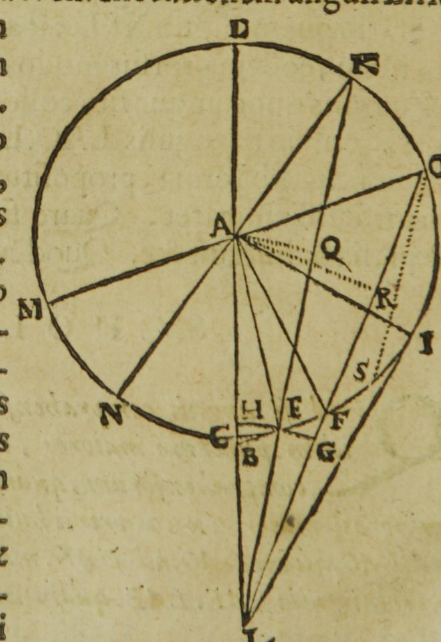
THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumque vtrique, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs compræhensum angulo inæqualem; ex angulis autem æqualibus lateribus cõpræhensis in oppositas bases perpendiculares demittantur: anguli, quos perpendicularium maior cum lateribus facit, in maiori sunt ratione, quam quos minor, si maiores ad minores referantur.

IN figura superiorum propositionum, sint rursus triangula, quorum toties facta mentio, LAK. LAO. & ducantur ex puncto *A*. ad bases *LK*. LO. perpendiculares *AQ*. *AR*. hæc maior, illa minor. Dico maiorem esse rationem anguli *LAR*. ad angulum *RAO*. quam anguli *LAQ*. ad angulum *QAK*. Angulus enim *LOA*. maior est angulo *LKA*. Eo quod arcui MF. insistat, qui maior est quam arcus NE. Idem angulus *LOA*. maior est quam *OLA*. ob latus *AL*. subtendens maius quam latus *AO*. & angulus *OLA*. totum maius quam pars *KLA*. Rursus differentiam angulorum *LOA*. *LKA*. metitur medietas arcus MN. idest *KO*. & medietas arcus FE. ob arcus MF. NE. quibus dicti

27. 3.

18. 1.



angu-

anguli insistunt. Differentia autem angulorum OLA. KLA. est angulus OLK. minor medietate arcus KO. (nã si duceretur recta KF. angulus KFO. externus, æqualis medietati arcus KO. est maior interno OLK.) Igitur differentia angulorum ad O. & K. maior est differẽtia angulorum OLA. KLA. Quare si angulus rectus statuatur tam prima quam secunda quantitas; LOA tertia; LKA. quarta; OLA. quinta; KLA. sexta: erit per 14. 1. huius, maior ratio cõplementi KAQ. ad complementum OAR. quam complementi LAQ. ad complementum LAR. Quare & maior erit ratio LAR. ad LAQ. quam OAR. ad KAQ. & permutando maior LAR. ad OAR. quam LAQ. ad KAQ. Quod erat &c.

20. 3.
16. 1.
corol. 26. 5.

Eodem modo si statuantur triangula FAL. EAL. in quorum bases productas cadant perpendiculares eædem, AR. AQ. maior erit ratio LAR. ad FAR. id est, ad RAO. (æquales enim sunt anguli FAR. RAO.) quam LAQ. ad EAQ. qui ipsi QAK. est æqualis.

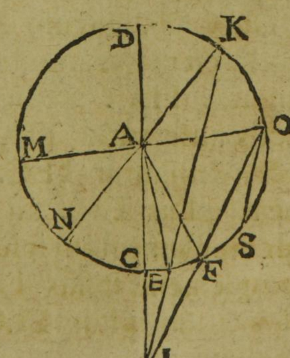
Sch. 26. 1.

Denique in triangulis LAF. LAK. in quorum bases LF. productam, & LK. intra triangulum, cadant eædem perpendiculares AR. AQ. eodem modo ostendemus, maiorem esse rationem LAR. ad FAR. quam LAQ. ad QAK. Quod erat vltimo probandum.

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

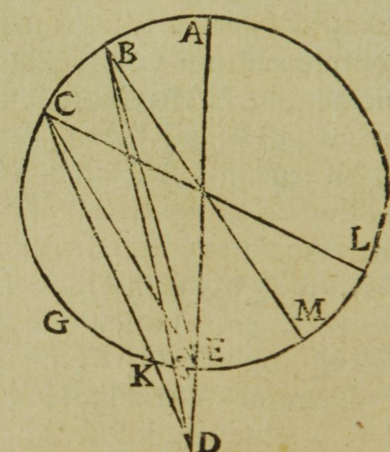
Isdem positis: Dico maiorem esse rationem LAF. ad LAE. quam OAD. ad KAD. Nam probatum est maiorem esse rationem LAF. ad LAE. quam AOL. ad AKL. & AOL. ad AKL. maiorem, quam OAD. ad KAD. Igitur LAF. ad LAE. maior est ratio, quam OAD. ad KAD. Quod fuit &c.

13. huius.



THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

IN circulo ABC. cuius centrum. F. diameter AE. sumatur extra circulum in diametro producta punctum D. à quo ducantur in conuexam peripheriam duæ rectæ DS. DK, quæ productæ secent cauam in B. C. sintq; puncta K. S. sub puncto contactus. G. quem efficit tangens circulum ducta recta DG. ex puncto D. & connectantur FK. FS. Dico maiorem esse rationem anguli FSD. ad angulum FKD. quam anguli BED. ad angulum CED. Ducantur CFL. BFM. secantes circulum in L. M. erit differentia angulorum LCK. MBS. id est FKC. FSB. illis æqualium medietas arcus ML. & medietas arcus KS. Differentia vero angulorum FEC. FEB. id est FCE. FBE. illis æqualium est medietas sola arcus CB. id est medietas arcus ML. maior igitur est differentia angulorum FKC. FSB. quam differentia angulorum FEC. FEB. maior etiam est angulus KCF. id est CKF. angulo ECF. id est FEC. idemq; angulus CKF. est maior angulo BSF. vt patet ex superioribus, & angulus FEC. maior angulo FEB. Quare si ex duobus rectis auferantur FKC. & FSB. item etiam ex duobus rectis demantur FEC. FEB. maior erit proportio complementi ipsius FSB. ad duos rectos, nimirum anguli FSD. ad complementum ipsius FKC. nimirum ad FKD. quam complementi ipsius FEB. videlicet ipsius BED. ad complementum ipsius FEC. nempe ad CED. Quod fuit probandum.



15. definit. & 5. 1.

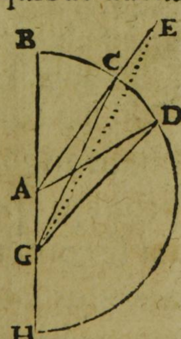
14. 1. huius.

THEO-

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

SI ab extremitate diametri duo arcus inæquales, accipiantur ad quos ex duobus punctis diametri singulis duæ sectæ ducantur, sintq; duæ ex puncto propiore extremitati ductæ, aut æquales inter se, aut propinquior minor remotiore, & angulorum ad punctum remotius constitutorum maximus, maior sit angulo quem ex datis punctis ductæ ad remotiorem arcum efficiunt: anguli quos illæ cum diametro efficiunt constituti ad punctum remotius ab extremitate diametri, maiorem inter se proportionem habent, quàm constituti ad propinquius, si maiores cum minoribus conferantur.

In circulo BCD. cuius diameter AH. sumantur ab extremo puncto. B. duo arcus inæquales BD. maior BC. minor; & in diametro duo puncta, A. G. quorum illud extremitati B. vicinius sit, hoc remotius ex quibus ductæ sint ad arcus rectæ AC. AD. GC. GD. efficientes cum diametro angulos illæ quidem CAB. minorem, DAB. maiorem; istæ CGB. minorem DGB. maiorem; sintq; rectæ AD. AC. aut æquales inter se, aut AC. minor; & angulus AGD. maior angulo GDA. Dico maiorem esse rationem anguli DGB. ad angulum CGB. quam anguli DAB. ad angulum CAB. Sint primum lineæ AC. AD. inter se æquales. Quoniam duo triangula CAG. DAG. habeat duo latera. CA. AG. duobus lateribus DA. AG. æqualia, & angulus DAG. comprehensus minor est angulo compræhenso CAG. maiorq; est



 ratio

10.2. huius angulus AGD. angulo ADG. ex ſuppoſitione, maior erit ratio anguli DGA. ad angulum ADG. quam CGA. ad ACG. & componendo maior ratio DGA. ADG. ſimul ad ADG. quam CGA. ACG. ſimul ad ACG. & permutando maior ratio DGA. ADG. ſimul ad CGA. ACG. ſimul quam ADG. ad ACG. Cum ergo totius AGD. ADG. ſimul, ad totum CGA. ACG. ſimul, maior ſit ratio quam partis ADG. ad partem ACG. & reliqui DGA. ad reliquum CGA. maior erit ratio quam totius DGA, ADG. id eſt anguli DAB. ad totum CGA. ACG. ſimul, id eſt angulum CAB.

33. 5.

Sit rurſus linea AC. minor linea AD. producatur AC. in E. & ſumatur AE. æqualis ipſi AD. & iungatur GE. Cum æquales ſint AE. AD. eodem prorſus modo quo priore parte huius, oſtendemus maiorē eſſe rationem DGA. ad EGA. quam DAB. ad EAB. ſed adhuc maior eſt ratio DGA. ad CGA. quam ad EGA. (cū minor ſit CGA. ipſo EGA.) Igitur anguli DGA. ad angulum CGA. maior eſt ratio quam anguli DAB. ad angulum CAB. Quod fuit &c.

8. 5.

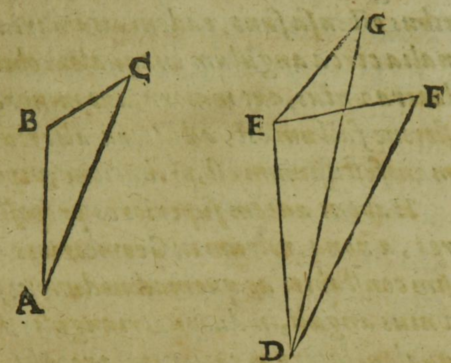
THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

SI duo triangula habuerint duo latera circa angulos inæquales proportionalia; auguli maioris compræhenſi ad reliquos maior erit ratio, quam anguli minoris compræhenſi ad reliquos, ſi prout proportionalibus lateribus opponuntur, inter ſe conferantur. Et trianguli, in quo eſt minor angulus compræhenſus, reliquorum angulorum maior ad minorem maiorem habet rationē, quam in alio triangulo reliquorum maior ad minorem.

Sint duo triangula ABC. DEF. quæ habeant duo latera AB. DE. Idem BC. DE. circa angulos inæquales

ABC.

ABC. maius DEF. minus, proportionalia; sitq; vt AB. ad BC. ita DE. ad EF. Dico maiorem esse rationem anguli ABC. ad angulum BAC. quam anguli DEF. ad angulum EDF. Item maiorem ABC. ad BCA. quam DEG. ad EGD. Deniq; si EFD. maior sit quã EDF. maiorem esse rationem EFD. ad EDF. quam BCA. ad BAC. Fiat ad rectam DE. angulus DEG. æqualis angulo ABC. & sumatur EG. æqualis ipsi EF. Quoniam est vt AB. ad BC. ita DE. ad EF. ex hypothesi, & vt DE. ad EF. ita DE. ad EG. ipsi EF. sumptam æqualem erit vt AB. ad BC. ita DE. ad EG. sunt autem, ex hypothesi, anguli ABC. DEG. æquales, erunt ergo triangula ABC. AEG. similia. Quoniam ergo in triangulis DEF. DEG. angulus DEG. maior est angulo DEF. & latera DE. EG. lateribus DE. EF. æqualia sunt, constat primò ex 9. proposit. secundi huius maiorem esse rationem anguli DEG. ad angulum EGD. id est ABC. ad BCA. quam anguli DEF. ad angulum EFD. Item maiorem eiusdem anguli DEG. ad angulum EDG. id est ABC. ad BAC. quam DEF. ad EDF. Constat secundo ex 10. propositione secundi huins maiorem esse rationem EFD. ad EDF. quam EGD. ad EDG. id est quam BCA. ad BAC. Quod erat &c.



9. 2. huius.

10. 2. huius.

SCHOLIVM.

Atq; ita triangulis habentibus duo latera, circa angulum inæqualem, proportionalia, aptauimus propositiones nonam, & decimam huius. Eadem vero ratione illis accommodari possunt quæcumq; propositionibus 11. 12. 13. 14. 15. *demonstrata*

strata sunt; Nam quæcumq; de inæquali angulorum ratione, in triangulis duo latera æqualia circa inæqualem angulum habentibus ostensa sunt, eadem etiam triangulis duo latera proportionalia circa angulum inæqualem obtinentibus conueniunt; modo latera vnius, aut maiora, aut minora, eo pacto, quo in hac propositione factum est, ad latera alterius reducantur. Quod quia manifestissimum est, probatione, vtpote superuacanea, abstinebo.

Habent autem superiores propositiones, ac præsertim posteriores, a nona, mirum in Geometricis vsum, vt ex sequentibus passim constabit: ac quemadmodum in superiori libro, ex æqualitate vnius anguli, in duobus triangulis, magno vsu inquisiuimus inæqualem laterum rationem, proposit. 23.24.25. ita hic ex duobus lateribus aut æqualibus, aut proportionalibus, in duobus triangulis angulorum inæqualem proportionem non minori compendio peruestigamus.

Vt vero memoriæ consulamus, eorum quæ hac de re hactenus probauimus, hic epilogismus esto.

In figura 13. huius inspiciantur duo triangula LAK. LAO. quæ habeant LA. AK. lateribus LA. AO. aut æqualia aut proportionalia, circa angulos LAK. LAO. maiorem illum hunc minorem, sintq; reliqua superioribus propositionibus delineata.

9. huius. *I. LAK. ad AKL. maiorem habet rationem quam LAO. ad AOL.*

9. huius. *II. LAK. ad ALK. maiorem habet rationem quam LAO. ad ALO.*

10. huius. *III. Maior est ratio LOA. ad OLA. quam LKA. ad KLA.*

12.& 13. hui. *IV. Ratio KAL. ad OAL. est maior, quam XKL. ad VOL.*

13. huius. *V. Ratio KAL. ad OAL. est maior, quam TLK. ad TLO.*

11. huius. *VI. Maior ratio LOA. ad LKA. quam OAD. ad KAD.*

11. huius. *VII. Minor est ratio OLA. ad KLA. quam OAD. ad KAD.*

14. huius. *VIII. LAR. ad RAQ. maiorem rationem habet, quam QLA. ad QAK.*

15. huius. *IX. Proportio LAF. ad LAE. maior est, quam OAD. ad KAD.*

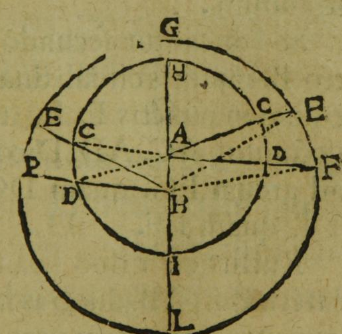
16. huius. *X. Ratio KCL. ad OCL. minor est, quam AEL. ad AFL.*

THEO-

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

SI ſint duo circuli eccentrici, quorum maior minorem contineat, ſintq; vtriuſq; centra intra circulum minorem, ex quorum vtrouis duæ rectæ ducantur circulos ſecantes arcus dictis lineis contenti, ad arcus vtrauis harum linearum, & ſemidiametro maioris circuli, in qua eſt centrum minoris compræhenſos, maiorem habent rationem in exteriori circulo quam in interiori, ad eorum vero complementa ad duos rectos, maiorem.

Sint duo circuli GEF. HCD. eccentrici, ille maior, qui hunc minorem contineat, illius centrum B. huius A. vtrumque intra circulum minorem HCD. ac recta per vtriuſque centrum ducta LG. ſecans circulorum peripherias maioris quidem in L.G. punctis, minoris in I. H. & ſit centrum circuli minoris A. in ſemidiametro circuli maioris BG. Ducantur primum (vt videre eſt in ſiniſtro ſemicirculo huius figuræ) duæ rectæ ex centro circuli minoris AE. AF. ſecantes exteriorem circulum in E. F. interiorem in C. D. & connectantur BE. BF. Dico maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. aut FE. ad FG. quam DC. ad DH. minorem vero eſſe proportionem EF. ad FL. quam CD. ad DI. aut EF. ad EL. quam CD. ad CI. Cum enim duo triangula FBA. EBA. habeant duo latera FB. BA. duobus EB. BA. æqualia, vtrumq; vtriq; in eodem vero triangulo inæqualia, maior enim FB., id eſt GB. quam BA. & angulus



15. def.

13.2.huius. angulus FBA. maior angulo EBA. erit maior ratio anguli FBA. hoc est arcus FG. ad angulum EBA. id est arcum EG. quam complementi anguli FAB. id est angulus FAG. hoc est arcus DH. ad complementum anguli EAB. id est angulum CAG. hoc est arcum CH. hoc enim 13. huius demonstratum est, & diuidendo maior ratio FE. ad EG. quam DC. ad CH. &c.

33. 6.
13. 1.

Rursus in ijsdem triangulis, angulus EAB. continetur sub minori basi EA. & minori latere AB. & angulus FAB. sub maiori basi FA. & minori latere AB. suntque anguli EBL. FBL. complementa angulorum æqualibus lateribus compræhensorum. Igitur maior est ratio anguli EAB. ad angulum FAB. id est arcus CI. ad arcum DI. quam anguli EBL. ad arcum FBL. id est quam arcus EL. ad arcum FL. vt vndecima secundi huius probatum est & diuidendo maior ratio CD. ad DI. quam EF. ad FL. & componendo, conuertendo, ac per conuersionem rationis, maior ratio CD. ad CI. quam EF. ad EL. Quod fuit primo demonstrandum.

7. 3.
11.2. huius.

Sed ducantur secundo (in dextra parte figuræ) ex centro B. maioris circuli duæ BE. BF. secantes externum circulum in punctis F. E. internum in punctis D. C. & connectantur AC. AD. Dico maiorem esse rationem arcus FE. ad arcum EG. quam DC. ad CH. maiorem vero CD. ad DI. quam EF. ad FL.

Rursus cum duo triangula CAB. DAB. habeant duo latera CA. AB. duobus lateribus DA. AB. æqualia vtrumque vtriq; in eodem vero triangulo inęqualia nam maior est CA. id est AI. parte AB. & angulus CAB. maior angulo DAB. erit ex 13. secũdi huius, maior ratio anguli CAB. ad angulum DAB. id est arcus CI. ad arcum DI. quã complementi anguli CBA. id est anguli EBL. id est arcus EL. ad complementũ anguli DBA. id est angulum FBL. id est arcũ FL. & diuidendo maior ratio CD. ad DI. quam EF. ad FL.

15. definit.
15. definit.
13.2. huius.

Denique in ijsdem triangulis anguli DBA. CBA. continentur,

tinentur, ille ſub minori baſi, & minori latere, hic ſub maiori baſi, & minori latere ſuntque DAH. CAH. complementa angulorum æqualibus lateribus compræhenſorum.

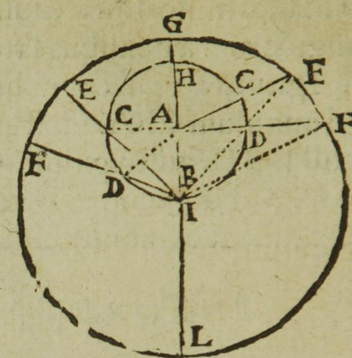
Igitur, ex 11. ſecundi huius, maior eſt ratio anguli DBA. ad angulum CBA. ideſt arcus FG. ad arcum EG. quam anguli DAH. ad angulum CAH. ideſt arcus DH. ad arcum CH. & diuidendo. Igitur ſi ſint duo circuli eccentrici &c. Quod erat demonſtrandum.

11.2. huius.

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

SI ſint duo circuli eccentrici, quorum maior minorem contineat, ſitque maioris centrum in peripheria minoris: Duæ rectæ ex minoris centro ductæ, ex vtroque circulo arcus abſcindunt, quorum exterior ad arcum ſui circuli inter vtramuis linearum, & ſemidiametrum maioris circuli, in qua eſt centrum circuli minoris, compræhenſum, maiorem rationem habet, quam interior ad ſuum, ad complementum vero minorem. Duæ verò rectæ ex centro maioris circuli ductæ auferunt arcus proportionales arcubus ductis à lineis verſus ſemidiametrum maioris circuli in qua eſt centrum minoris; ex alia verò parte maiori proportione interiores quam exteriores.

Sint ijdem circuli, qui in ſuperiori propoſitione, ſed centrum maioris B. cadat in peripheriam minoris, & ex centro minoris A. ductæ rectæ AE. AF. in ſiniſtra parte ſchematis abſcindunt ex maiori circulo arcum EF. ex minori arcum CD. Dico rurſus maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. & maiorem CD. ad DB. quam EF. ad FL. Cum enim ſit eadem diſpoſitio, ac ratio triangulorum FBA. EBA



quæ in prima parte præcedentis propositionis, eadem etiam omnino demonstratione, ex 13. huius, probabimus quod propositum est, vt ideo necesse non sit superflua repetitione lectorem detinere.

Sed ducantur in dextra parte schematis ex centro maioris circuli B. duæ rectæ BE. BF. secantes exteriorem circulum in punctis E. F. interiorem in punctis CD. Dico eandem esse rationem arcus DC. ad arcum CH. quæ arcus FE. ad arcum EG. & maiorem CD. ad DI. quam EF. ad FL. Nam anguli HAD. HAC. dupli sunt angulorum, GBF. GBE. igitur vt GAD. ad GAC. ita GBF. ad GBE. id est, vt arcus DH. ad arcum DC. ita arcus FG. ad arcum EG. & diuidendo.

20. 3.
15. 5.
33. 6.
20. 3.

Denique quia ratione maior est arcus CD. quam EF. & minor DB. quam FL. angulus enim FBL. idest arcus FL. maior est angulo BAD. hoc est arcu DB. maior erit ratio CD. ad DB. quam EF. ad DB. sed EF. ad DB. habet maiorem rationem quam EF. ad FL. Igitur maior est ratio CD. ad DB. quam EF. ad FL. Quod vltimo probandum erat.

16. 1.
8. 5.
8. 5.

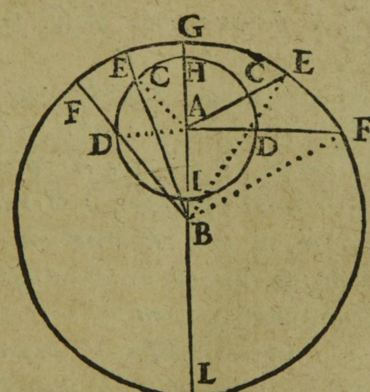
THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

SI sint duo circuli eccentrici, quorum maior minorem contineat, sitq; maiori centrũ extra peripheriam minoris: Duæ rectæ ex minoris centro ductæ ex vtroque circulo arcus abscindunt, quorum exterior ad arcum sui circuli inter vtramuis linearum, & semidiametrum maioris circuli, in

qua

qua eſt centrum circuli minoris, compræhenſum, maiorem rationem habet quam interior ad ſuum, ad complementum vero, minorem. At vero duæ rectæ ex maioris centro ductæ vtrumque circulum ſecantes, arcus abſcindunt, quorum interior ad vtrumuis arcuum inter ductas, & diametrum compræhenſum in ſuo circulo, maiorem habet rationem, quam exterior ad arcus ſimiliter poſitos, in ſuo.

Ponantur ijdem circuli, qui duabus ſuperioribus propoſitionibus, ſed centrum maioris B. cadat extra ambitum minoris, & ex centro minoris A. ducantur, vt prius in ſiniſtra parte figuræ rectæ AE. AF. abſcindentes ex minori circulo arcum DC. ex maiori arcum FE. Dico iterum maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. & minorem EF. ad FL. quam CD. ad DI. Hoc vero ex duobus triangulis FBA. EBA. eadem omnino ratione probatur qua in 1. parte 19. huius.



At verò due rectæ BE. BF. ex centro maioris circuli prodeuntes, (vt cernere eſt in dextro ſemicirculo) auferant ex circulo minori arcum CD. ex maiori arcum EF. Dico maiorem eſſe rationem DC. ad CH. quam FE. ad EG. & maiorem CD. ad DI. quam EF. ad FL. Cum enim duo triangula CAB. DAB. duo latera CA. AB. duobus lateribus DA AB. æqualia habeant, vtrumque vtrique & angulus CAB. maior angulo compræhenſo DAB. complementa angulorum compræhenſorum nimirum anguli DAG. CAG

15. defin.

33. 6. ad duos rectos id est arcus DH. CH. maiorem habent ratio-
11. 2. huius. nem quã angulus sub minori basi DB. & maiori latere BA.
8. 3. ad angulum CBA. sub maiori basi BC. & maiori latere BA.
1. pron. contentum. hoc est quam arcus FG. ad arcum EG. & diuidendo maior ratio DC. ad CH. quam FE. ad EG.

13. 2. huius. Denique in ijsdem triangulis, maior est ratio anguli cõ-
33. 6. præhensi CAB. ad compræhensum DAB. id est arcus CI. ad arcum DI. quam complementi anguli CBA. ad comple-
13. 1. mentum anguli DBA. ad duos rectos, id est quam angulus
33. 6. EBL. ad angulum FBL. id est quam arcus EL. ad arcum FL. vt 13. huius demonstratum est, & diuidendo, maior ratio CD. ad DI. quam EF. ad FL. Quod fuit vltimo loco probandum.

SCHOLIVM.

EX ijs quæ tribus hisce propositionibus demonstrata sunt, manifestum est.

1 *Si sint duo circuli eccentrici quorum maior minorem contineat, semper contingere, vt duæ rectæ ex minoris centro ductæ, ex vtroque circulo arcus abscindant, quorum exterior inter vtramuis rectorum, & semidiametrum maioris circuli, in qua est centrum circuli minoris, compræhensus, maiorem rationem habeat, quam interior ad suum, ad complementum vero minorem. Nam in primis figuris* 19. 20. 21. *huius demonstratum est perpetuo, maiorem esse rationem FE. ad EG. quam DC. ad CG. minorem vero EF. ad FL. quam CD. ad DI.*

2 *Iisdem positis, si duæ rectæ ex maioris circuli centro ductæ, arcus ex vtroque circulo abscindant, semper exterior, ad arcum sui circuli vtrauis ductarum rectarum, & semidiametro maioris circuli, in qua non est centrum minoris, compræhensum, minorem habet rationem, quam interior ad arcum eodem modo compræhensum. Nam in secundis figuris* 19. 20. 21. *huius probatum est semper minorem esse rationem EF. ad FL. quam CD. ad DI.*

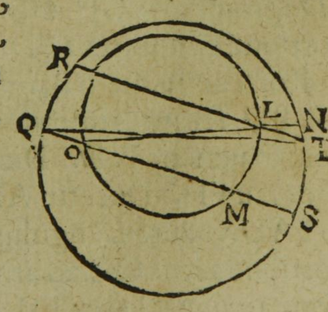
3 *Adhuc*

3 *Adhuc ijſdem poſitis, ſi duæ rectæ ex maioris centro ductæ arcus ex vtroque circulo abſcindant, qui comparentur cum arcubus inter vtramuis rectarum, & ſemidiametrum maioris circuli in qua eſt centrum minoris, contentis: ſi quidem centrum maioris ſit intra circulum minorem, maior eſt ratio arcus exterioris abſciſſi ad ſuum arcum, quam interioris ad ſuum; ſi idem centrum ſit intra peripheriam minoris, eadem eſt ratio arcus exterioris abſciſſi ad ſuum arcum, quæ interioris ad ſuum: denique ſi idem centrum fuerit extra ambitum minoris, arcus exterior abſciſſus ad ſuum arcum minorem habet rationem, quam interior ad ſuum. Probatum enim eſt in ſecunda figura 19. maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. In ſecunda 20. eandem eſſe rationem FE. ad EG. quæ DC. ad CH. Denique in ſecunda 21. minorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH.*

LEMMA I.

SI circulus circulum contineat, parallelæ rectæ lineæ vtrumque circulum ſecantes, maiores in interiori circulo proportione arcus compræhendunt quam in exteriori.

Contineat circulus NS. circulum LM. & parallelæ RT. QS. ſecent vtrumque circulum, exteriorem in T. S. interiorem in LM. Dico arcum LM. interiorem dictis parallelis compræhenſum, proportionem maiorem eſſe arcu TS. compræhenſo ijſdem parallelis in circulo exteriori. Connectatur QT. & OL. quæ producatur dum circulum exteriorem ſecet in L. manifeſtum eſt punctum N. cadere ſupra punctum T. ideoque lineas ON. QT. ſe ſe inuicem ſecare inter puncta



N. O.

16. 1. 33. 6.

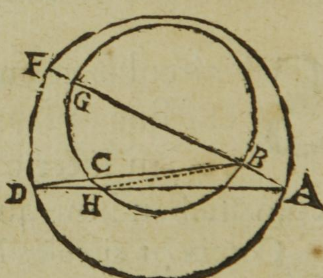
N.O. Cum igitur angulus externus LOM. maior sit interno TQS. vt autem angulus LOM. ad angulum TQS. ita proportione arcus LM. ad arcum TS. maior igitur proportione est arcus LM. arcu TS. Quod fuit ostendendum.

LEMMA II.

SI circulus circulum contineat, duæ rectæ ex puncto vtriusuis peripheriæ, quod vtrique peripheriȩ commune non sit, circulum vtrumq; secantes, maiores ex interiore cireulo proportione arcus auferunt, quam ex exteriori.

Contineat circulus FD. circulum GC. ac primum ex puncto A. exterioris circuli duæ rectæ ducantur AF. AD. secantes exteriorem circulum in punctis F. D. interiorem in punctis GH. Dico arcum GH. lineis AF. AD. compræhensum in interiori circulo, proportione maiorem esse atcu FD. ijsdem rectis in exteriori circulo compræhensum. Connectatur HB. erit angulus GBH. maior angulo FAD. sed vt GBH. ad FAD. ita proportione arcus GH. ad arcũ FD. igitur arcus GH. maior est proportione quam arcus FD.

16. 1. 33. 6.



Rursus ex puncto B. interiori circuli ducantur duæ rectæ BF. BD. secantes internum circulum in punctis G. C. externum in punctis F. D. Dico arcum GC. proportione maiorẽ esse arcu FD. Ducatur AD. erit angulus GBC. maior angulo FAD. vt autem angulus GBC. ad angulum FAD. ita proportione arcus GC. ad arcum FD. Igitur maior est proportione arcus GC. arcu FD. Quod erat &c.

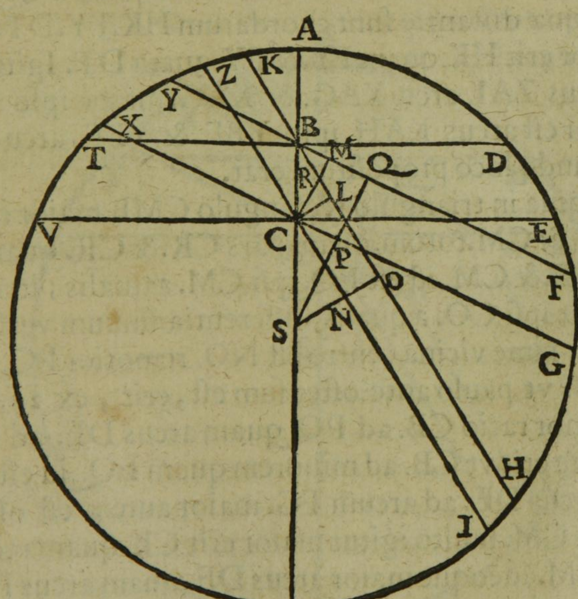
16. 1.

LEM-

LEMMA. III.

PArallelarum rectarum, quæ ex duobus punctis diametri in circuli peripheriam ducuntur, quæ perpendiculares ſunt, maximum arcum comprehendunt, & reliquarum, quæ perpendicularibus ſunt viciniores maiorem quam quæ remotiores: Rectarum verò quæ ex eodem puncto diametri vtrinque circulum ſecant, perpendiculares minimum arcum ſubtendunt, reliquæ autem eo maiorem, quo magis à perpendicularibus diſtant.

Sit circulus ADI. cuius centrum S. diameter AS. in qua ſumantur duo puncta B.C. ex quibus ducantur duæ paralle-



læ BD.CE.& BF.CG.& BH.CI. ſintque BD.CE. etiam perpen-

pendiculares ad AS. & duæ BF. BG. viciniores dictis perpendicularibus, quam BH. CI. Dico arcuum qui dictis parallelis comprehenduntur maximum esse DE. hinc FG. maiorem quam HI. arcuum vero quos rectæ CE. CG. CI. prodeuntes ex eodem puncto C. & productæ in reliquam circumferentiam in puncta V.X.Z. subtendunt minimum esse VAE. maximum ZCI. & XCG. maiorem quam VAE. Item productis DB. FB. HB. in puncta T.Y. K. minimum esse arcum TAD. maiorem YAF. maximum KAH. Ducantur CM. CL. perpendiculares ad BF. BH. & secet CM. ipsam CH. in R. Item ex centro S. ad easdem, perpendiculares SQ. SO. secantes etiam rectas CG. CI. in punctis N. P. erunt etiam anguli SNC. SPC. recti: minor igitur SN. quam SP. & SP. quam SC. Quare cum minor sit distantia chordæ ICZ. à centro S. quam chordæ GCX. & chordæ GCX. minor quã chordæ ECV. maior erit ICZ. quam GCX. & GCX. quam ECV. Eodem modo cum minor sit SO. quam SQ. & SQ. quam SB. quæ distantię sunt chordarum HK. FY. DT. à centro S. maior erit HK. quam FY. & FY. quam DT. Igitur maior est arcus ZAI. arcu XAG. & XAG. maior ipso VCE. Item maior est arcus KAH. ipso YBF. & YBF. arcu TBD. Quod secundo loco propositum erat.

29. 1.
19. 1.
15. 3.
19. 1.
15. 13.
Schol. 28. 3.

Rursus quia in triangulo rectangulo CMB. maior est CB. quam CM. & CM. totum, quam pars CR. & CR. quam CL. suntque CB. & CM. id est PQ. ipsi CM. æqualis; item CL. hoc est NO. ipsi CO. æqualis, differentiæ sinuum versorum, quarum maxime vicina centro est NO. remotior PQ. remotissima CB. vt paulo ante ostensum est, erit, ex 29. primi huius, minor ratio CB. ad PQ. quam arcus DE. ad arcum FG. Quare erit vt CB. ad minorem quam PQ. id est quam CM. ita arcus DE. ad arcum FG. maior autem est ostensa CB. quam CM. multo igitur maior erit CB. quam recta minor ipsa CM. ideoque maior arcus DE. quam arcus FG. Atque eodem modo cum maior sit MC. quam CL. id est PQ. quam NO. ostendemus arcum FG. esse maiorem arcu HI. Quod primo loco propositum fuerat.

19. 1.
19. 1.
34. 1.
29. 1. huius.
8. 5.

SCHO-

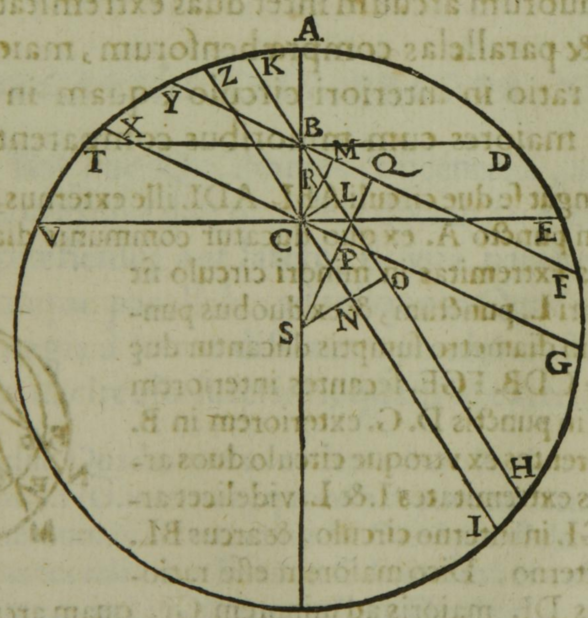
SCHOLIVM.

Intelligenda est secunda pars lemmatis de arcubus minoribus semicirculo, nam si de maioribus sermo sit manifestum est à maiori chorda minorem arcum auferri, quam à minori; ex Scholio 28. 3.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

ARcuum, quos duæ parallelæ ex duobus punctis diametri in circuli peripheriam ductæ subtendunt, maximam habent inter se rationem quos perpendiculares, minimam quos remotissimæ à parallelis subtendunt, si maiores cum minoribus comparentur, singulique semicirculo minores existant.

IN figura superioris Lemmatis. Dico maiorem esse ra-



tionem arcus VAE. ad arcum TAD. quam arcus XAG.

arcum YAF. & arcus XAG. ad arcum YAF. maiorem, quã arcus ZAI. ad arcum KAH. Nam vt superiori Lemmate ostensum est, minor est arcus TAD. arcu YAF. & maior TV. quam XY. ideoque eius duplum TV.DE. simul maius quam XY. FG. simul. Igitur maior est ratio TV. DE. simul ad TAD. quam XY. FG. simul ad YAF. & componendo, maior ratio VAE. arcus, ad arcum TAD. quam XAG. ad YAF. Atque eodem prorsus modo ostendetur maiorem esse rationem XAG. ad YAF. quam ZAI. ad KAH. Quod erat demonstrandum.

8. 5.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

SI duo circuli sese interius contingant, atque ex duobus punctis diametri communis duæ parallelæ ducantur vtrumque circulum secantes: duorum arcuum inter duas extremitates diametri, & parallelas compræhensorum, maior erit inter se ratio in interiori circulo, quam in exteriori, si maiores cum minoribus comparentur.

Contingãt se due circuli ABL. ADI. ille externus, hic internus, in puncto A. ex quo ducatur communis diameter AL. cuius extremitas in minori circulo sit I. in maiori L. punctum, & ex duobus punctis C.F. in diametro sumptis ducantur duę parallelæ CDB. FGE. secantes interiorem circulum in punctis D. G. exteriorem in B. E. & auferentes ex vtroque circulo duos arcus versus extremitates I. & L. videlicet arcus DI. GI. in interno circulo, & arcus BL. EL. in externo. Dico maiorem esse rationem arcus DI. maioris ad minorem GI. quam arcus BL. maioris ad minorem EL. Ducantur rectæ AG. AD. & producan-

11. 3.



ducantur, dum externum circulum secent in punctis M. N. manifestum est punctum M. cadere sub punctum E. (cum puncta G. E. sint in eadem recta FE. & cadat punctum M. sub punctum G.) & punctum N. sub punctum B. maior igitur est arcus NA. arcu BA. & arcus MA. arcu EA. arcubus autem MA. NA. proportione æquales sunt arcus GA. DA. singuli singulis, vt constat ex Scholio 22.3. Igitur arcus GA. proportione maior est quam arcus EA. & DA. quam BA. Cum autem æquales sint proportione semicirculi AL. AI. ablatis inęqualibus AE. AG. remanent inæquales EL. maior GI. minor: minor igitur est ratio IG. ad GD. quã LE. ad GD. sed arcus LE. ad arcũ GD. etiã minorem habet rationem, quam ad arcum EB. qui superiori Lemmate probatus est minor arcu GD. Igitur minor est ratio IG. ad GD. quam LE. ad EB. & conuertendo, ac componendo, maior est ratio arcus DI. ad arcum GI. quam arcus BL. ad arcum EL. Quod fuerat demonstrandum.

Schol. 22. 3. & Pappus Alexan. Lemmate ad 8. 4. 5. pron. 8. 5.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

SI sint duo Quadrantes concentrici, ac lateri communi duę parallelę ducantur: arcus compræhensus aut latere, & vna parallelarum; aut vtraque parallela; ad reliquum Quadrantis arcum magis à latere distantem, maiorem habet rationem in circulo interiori, quam in exteriori.

Sint duo Quadrantes ex eodem centro A. descripti IFB. externus, LNO. internus, quorum commune latus AB. secans externum in B. internum in O. cui parallelæ sint DC. FE. secantes reliquum latus in C.E. internũ circulum in M. N. externum in D.F. sintque reliqui Quadrantis arcus magis à latere AB. distantes, interior NL. exterior FI. Dico ma-

iorem esse rationem ON. ad NL. quam BF. ad FI. Item maiorem rationem MN. ad NL. quam DF. ad FI. Ducatur AN. quæ producta secet externum circulum in G. erunt arcus NL. GI. proportione æquales, maior autem est FI. quam GI. Igitur arcus FI. proportione maior est, quam NL. sed & ON. maior est proportione quam BF. & MN. proportione maior, quam DF. Quare cum maior sit proportione ON. quam BF. & NL. minor etiam proportione quam FI. maior erit ratio ON. ad NL. quam BF. ad FI. Item cum maior sit proportione MN. quam DF. & NL. minor proportione quam FI. eodem modo maior erit ratio MN. ad NL. quam DF. ad FI. Quod fuit demonstrandum.



33. 6.

Lemm. 1. huius.

8. 5.

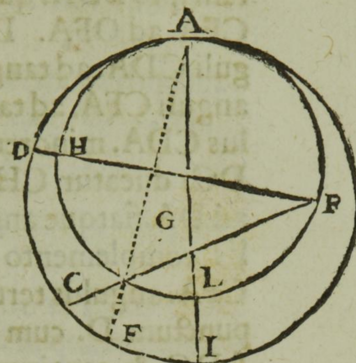
Lemm. 1. huius.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI duo circuli sese interius contingant; duæ rectæ ex puncto vtriusuis peripheriæ, in quo non sit contactus, circulum vtrumque secantes, arcus comprǽhendunt, quorum inrerior ad arcum inter comprǽhensum, & extremitatem cõmunis diametri puncto contactus oppositam maiorem habet rationem quam exterior.

Duo circuli ADI. AHL. contingant sese interius in puncto A. sitque interior AHL. exterior ADI. ac primum ex puncto B. in interiori circulo, ducantur duæ rectæ BC. BD. secantes interiorem circulum in punctis G.H exteriorem in punctis C. D. sitque communis diameter ALI. secans interiorem

riorem circulum in L. exteriorem in I. erit arcus HG. compræhensus inter rectas BD. BC. in interiori circulo, & DC. in exteriori; & arcus GL. contentus inter arcum HG. & punctum, seu extremitatem diametri L. puncto contactus oppositam: arcus verò CI. contentus inter DC. & similem extremitatem in circulo exteriori. Dico maiorem esse rationem HG. ad GL. quam DC. ad CI. Ducatur per punctum G. recta AG. quæ producta secet exteriorem circulum in puncto F. Erunt arcus GL. FI. proportione æquales, maior autem est arcus CI. arcu FI. Igitur proportione maior est arcus CI. quam arcus GL. Sed & proportione maior est arcus HG. arcu DC. Igitur cum maior sit proportione HG. quam DC. maior erit ratio HG. ad GL. quam DC. ad GL. & cum maior sit proportione CI. quam GL. maior erit ratio DC. ad GL. quam DC. ad CI. Igitur maior est ratio HG. ad GL. quam DC. ad CI.



Schol. 22. 3. & pappus Lemm. ad 8. 4. collectionũ Lemm. 2. 2. huius. 8. 5. 8. 5.

Idem eodem modo demonstrabitur si punctum B. sumatur in exteriori circulo. Quare si duo circuli sese interius contingant &c. Quod erat demonstrandum.

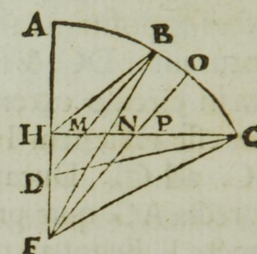
THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

SI fuerint quatuor anguli proportionales singuli minores recto, ac primus maior secundo, ac tertio; maior erit ratio tangentis primi, ad tangentem secundi, quàm tangentis tertij, ad tangentem quarti.

Sint duo anguli quicumque minores recto CDA. DBA. item duo alij quicumque CFA. OFA. sitque HDC. maior

tam

tam ipso BDA. quam CFA. & sit vt CDA. ad BDA. ita CFA. ad OFA. Dico maiorem esse rationem tangentis anguli CDA. ad tangentem anguli BDA. quam sit tangentis anguli CFA. ad tangentem anguli OFA. Contineat angulus CDA. minorem BDA. & ex quolibet puncto C. rectæ DC. ducatur CH. perpendicularis ad DA. fiatque angulus HCF. æqualis complemento ipsis CFA. erit CFA. angulus tertius, qui cadet sub punctum D. cum sit minor quàm ADC. & contineat angulum quartum minorem AFO. & distantia FC. describatur circulus FCA. secans priores lineas in C. O. B. A. & connectatur FB. quæ secet CH. in N. & DB. secet eandem in M. Item FO. secet eandem in P. cadet punctum O. inter B. & C. & punctum P. inter N. & C. Nam cum triangula CFD. BFD. habeãt circa angulos inæquales CFD. BFD. duo latera CF. FD. duobus lateribus BF. FD. æqualia vtrũque vtrique, in eodem vero triangulo inæqualia; maior erit ratio CFA. ad BFA. quàm CDA. ad BDA. ideoque habebit angulus CFA. ad aliquem angulum maiorem ipso CFB. eandem rationem, quàm CDA. ad BDA. Igitur angulus AFO. ad quem eandem proportionem habet, est maior, quàm AFB. cadet igitur punctum O. inter B. & C. & punctum P. inter N. & C. Iam dicta perpendicularis CH. erit tangens tàm anguli CFA. quàm anguli CDA. recta NB. tangens anguli BFA. MH. tangens anguli BDA. & PH. tangens anguli OFA. constat punctum N. cadere inter M. & C. item ostensum est punctum P. cadere inter N. & C. quare multo maior est PH. quam MH. Igitur maior erit ratio CH. tangentis anguli CDA. ad MH. tangentem anguli BDA. posito sinu toto DH. quam CH. tangentis anguli CFA. ad PH. tangentem anguli OFA. posito sinu toto FH. Quod erat demonstrandum.



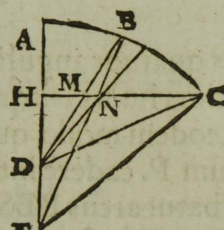
13. aut 17. 1. huius.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

SI fuerint quatuor tangentes proportionales, maiorque prima quam ſecunda & tertia, minor erit ratio primi anguli reſpondentis primæ tangenti ad ſecundum, quam tertij ad quartum.

Sint quatuor tangentes E. G. I. K. ſitque vt E. ad G. ita I. ad K. ſitque E. maior quàm G. maior item quàm I. centro F. deſcribatur circulus ABC. diametro FA. & ſit arcus AC. ſeu angulus AFC. reſpondens tangenti I. & arcus AB. ſeu angulus AFB. reſpondens tangenti K. hinc ducta CH. ad FA. perpendiculari, primi anguli cõplementum ſit HCD. erit ADC. primus angulus, & cum angulus ADC.



ſit maior, quàm HFC. (nam maioris anguli maior tangens) cadet punctum D. inter H. & F. (ſi enim caderet in F. eſſet angulo AFC. æqualis, ſi infra minor) & connectatur DB. quæ ſecet HC. in M. & ducatur DN. ſecans HC. in N. erit punctum M. inter H. & N. & angulus HDN. angulus ſecundus reſpondens ipſi G. Nam cum CH. ſit tangens anguli AFC. & NH. tangens anguli BFA. item CH. tangens anguli HDC. Nam eſt, vt I. ad K. ita CH. ad HN. ſed vt I. ad K. ita E. ad G. & vt E. ad G. ita CH. tangens anguli HDC. ad HN. (vtrobique enim eſt proportio æqualitatis) tangentem anguli HDN. Dico minorem eſſe rationem CDH. ad NDH. quàm CFA. ad BFA. Cũ enim in ſuperiori ex 13. & 17. 2. huius oſtenſum ſit, maiorẽ eſſe proportionem anguli CFA. ad BFA. quàm CDH. ad MDH. & CDH. ad MDH. maior ſit ratio, quàm CDH. ad NDH. maior erit proportio anguli tertij CFA. ad angulũ quartũ BFA. quã primi CDH. ad ſecundum NDH. ideoq; minor ratio primi anguli CDH

8. 5.

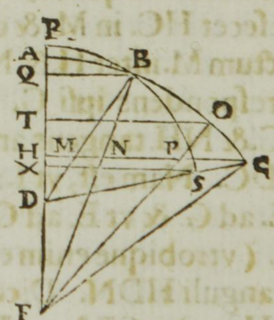
ad

ad secundum NDH. quàm tertij CFA. ad quartum BFA. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

SI sint quatuor anguli proportionales, sitque primus maior secundo, ac tertio; minor erit ratio sinus recti, ac chordæ primi ad chordam, & sinum secundi, quàm sinus, & chordæ tertij, ad sinum, & chordam quarti.

Sint quatuor anguli proportionales dispositi, vt in figura penultima huius, sitque vt CDH. ad MDH. ita CFA. ad OFA. eodem modo quo vigesima sexta huius ostendemus punctum P. cadere inter N. & C. Centro D. distantia DB. describatur arcus RBS. secans diametrum FA. in R. & DC. in S. Cum DB. sit minor quàm DC. erit DS. illi æqualis minor quàm DC. cadet punctum S. inter D. & C. Ducantur sinus BQ. OT. SX. erit CH. sinus rectus anguli CFA. & BQ. sinus rectus anguli BFA. respectu sinus totius FA. item SX. sinus rectus arcus RS. seu anguli CDA. & BQ. sinus rectus arcus BR. seu anguli BDA. respectu sinus totius DB. seu DC. & OT. sinus rectus anguli OFA. respectu sinus totius FA. Cùm minor sit SX. quàm CH. minor erit ratio SX. sinus anguli primi CDA. ad BQ. sinum rectum anguli secundi BDA. quàm CH. sinus recti anguli tertij CFA. ad BQ. sinum rectum anguli BDA. qui cum minor sit quàm OT. multò minor erit ratio SX. ad BQ. quàm CH. ad OT. sinum quartum anguli OCR. Quod erat ostendendum.



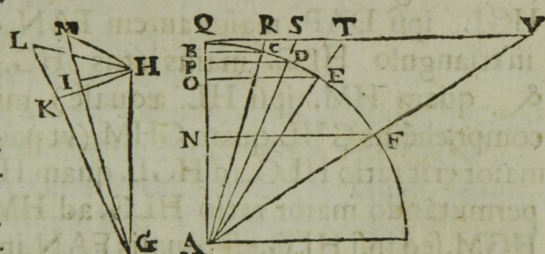
Idem

Idem ostendetur in chordis, si enim propositi sint quatuor arcus proportionales, accipiantur eorum dimidij: ostendetur minorem esse rationem sinus primi ad secundum, quàm tertij ad quartum: vt verò dimidium ad dimidium, ita totum ad totũ, quare minor erit ratio dupli sinus, id est chordæ primæ ad secundam quàm tertiæ ad quartam. 15. 5.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

SI fuerint quatuor sinus proportionales in quadrante, maiorq́; primus quàm secundum, ac tertius; maior erit ratio anguli respondentis primo sinui ad secundum, quàm tertij ad quartum.

Sint in quadrante cuius centrum A. quatuor sinus FN. EO. DP. CB. proportionales, ac quidem FN. maior quam EO. aut DP. quibus respondeãt arcus FQ. EQ. DQ.



CQ. seu anguli FAN. EAO. DAP. CAB. Dico maiorem esse rationem FAN. ad EAO. quàm DAP. Ad CAB. Ad lineã GH. quamcunque fiat angulus HGI. æqualis angulo DAQ. Et ex H. in lineam GI. ducatur perpendicularis HI. Item ad eandem lineam fiat angulus HGK. æqualis angulo CAQ. & demittatur HK. perpendicularis ad GK. Rursus fiat angulus IHL. æqualis angulo NFA. complementi anguli FAN. secetque HI. productam GI. in L. Denique ad H. fiat angulus KHM. æqualis angulo OEA. complementi anguli EAO. secetque recta HM. productam GK. in M. erit reliquus HLI. æqualis ipsi FAN. & HMK. æqualis EAO.

ideoque æquiangula triangula IHL. NFA. & KHM. OEA. ac proinde similia. Cumque æqui angula sint triangula rectangula HIG. DPA. & HKG. CBA. (Nam præter angulos rectos ad K. I. P. B. sumpti sunt anguli æquales HGI. ipsi DAP. & KGK. ipsi CAB. quare & reliqui anguli reliquis sũt æquales) erit vt IH. ad HG. ita PD. ad DA. & vt HG. ad HK. ita DA. id est AC. ad CB. igitur, ex æqualitate, erit vt IH. ad HK. ita DP. ad CB. sed vt DP. ad CB. ita est ex hypothesi FN. ad EO. vt igitur IH. ad HK. ita FN. ad EO. Cùm ergo sit vt HL. ad IH. ita AF. ad FN. & vt IH. ad HK. ita FN. ad EO. & vt KH. ad HM ita EO. ad EA. erit ex æquali vt HL. ad HM. ita AF. ad EA. æquales autem sunt AF. EA. igitur etiam æquales sunt HL. & HM. Cum igitur triangula GHL. GHM. habeant duo latera GH. HL. æqualia duobus lateribus SH. HM. in eodem verò triangulo inæqualia (nam angulus HLG. ostensus est ęqualis ipsi FAN. & HGL. ipsi DAP. maior autem FAN. quam DAP. igitur in triangulo HLG. maius latus HG. quam latus HL. & quam HM. ipsi HL. æquale) minorque sit angulus compræhẽsus GHL. quàm GHM. (vt paulò post ostendetur) maior erit ratio HLG. ad HGL. quam HMG. ad HGM. & permutando maior ratio HLG. ad HMG. quam HGL. ad HGM. sed ipsi HLG. est ęqualis FAN. ipsi HMG. EAO. ipsi HGL. DAP. ipsi HGM. CAB. ergo maior est ratio FAN. ad EAO. quam DAP. ad CAB. seu maior ratio arcus FQ. ad arcum EQ. quam arcus DQ. ad arcum CQ. Quod erat propositum. Quod verò GHL. sit minor quàm GHM. probatur, quia cum angulus IGH. sit maior angulo KGH. erit eius complementum GHI. minus complemento alterius GHK. & cadet perpendicularis HK. supra HI. eritque LHK. angulus pars ipsius LHI. item cum angulus HLI. positus sit maior quàm HMK. erit eius complementum IHL. minus quàm KHM. Quare cum LHK. sit minor quàm LHI. & LHI. minor quàm MHK. multò minor erit LHK. pars ipsius LHI. quàm MHK. Cadet igitur HM. supra HL. ideoque angulus LHG. angulo MHG. minor erit.

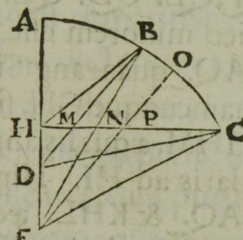
32. 1.
4. 6.
15. defin.
19. 1.
10. 2. huius.

THEO-

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI fuerint quatuor anguli proportionales ſinguli minores recto, ac primus maior ſecundo, ac tertio; maior erit ratio ſecantis primi, ad ſecantem ſecundi, quàm ſecantis tertij, ad ſecantem quarti.

Sint omnia, quæ in 26. theoremate huius, erit FC. ſecans anguli CFA. & PF. ſecans anguli PFA. reſpectu ſinus totius FH. item CD. ſecans anguli CDA. & MD. ſecans anguli MDA. poſito ſinu toto DH. Dico maiorem eſſe rationem CD. ad DM. quam CF. ad PF. Quoniam minor eſt DB. quã DC. eademq; minor quam FA. id eſt quam FB. aut FC. & æquales ſunt FB. FC. à centro ad circumferentiam, minor erit ratio DB. FB. quam DC. ad FC. & permutando minor DB. ad DC. quam FB. ad FC. Rurſus cum in triangulo FHN. angulus FHN. ſit rectus, erit FNH. acutus, & MNB. obtuſus ideoque MB. maior quam BN. Quare cum minor ſit ratio primę quantitatis DB. ad ſecundam DC. quam tertiæ FB. ad quartam FC. ſitque prima DB. minor tertia FB. ſi ex prima, & tertia demantur ex illa maior MB. ex iſta minor NB. minor erit ratio MD. reſidui primæ quantitatis, ad ſecundum DC. quam NF. reſidui tertiæ quantitatis, ad quartam FC. & conuertendo, maior ratio DC. ad MD. quam FC. ad NF. at vero FC. ad NF. maior eſt quam FC. ad FP. (nam cum in triangulo rectangulo FHN. angulus FNH. ſit acutus, erit FNP. obtuſus, ideoque FPN. acutus, & FP. maior quam FN.) Igitur ratio DC. ad MD. maior eſt quam CF. ad FP. Quod erat &c.



7. 3.

32. 1. & 13. 1.

19. 1.

6. 1. huius.

8. 5.

19. 1.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

SI sint quatuor secanres proportionales, maiorque prima quam secunda, ac tertia; minor erit ratio primi anguli respondentis primæ secanti ad secundum, quàm tertij ad quartum.

Vide figurã 29. huius.

Sint quatuor secantes proportionales in quadrante BN. cuius centrũ A. videlicet AV. AT. AS. AR. sitque AV. maior quàm AT. aut AS. quibus respondeant arcus QF. QE. QD. QC. seu anguli FAQ. EAQ. DAQ. CAQ. Dico minorem esse rationem anguli FAQ. ad angulum EAQ. quàm anguli DAQ. ad angulum CAQ. Ad lineam quamcunque GH. fiat angulus GHI. æqualis angulo FAB. & IHM. æqualis angulo EAQ. & ducatur GIM. perpendicularis ad HI. Hinc fiat angulus GHK. æqualis angulo DAQ. & KHL. æqualis angulo CAQ. & ducatur GKL. perpendicularis ad HK. erunt HG. HM. secantes angulorum FAB. EAB. & HG. HL. secantes angulorum DAB. CAB. illæ respectu sinus totius HI. istæ respectu sinus totius HK. erit igitur vt GH. ad HM. ita AV. ad AT. & vt GH. ad HL. ita AS. ad AR. cum igitur sit vt GH. ad HM. ita AV. ad AT. & vt AV. ad AT. ita ex hypothesi AS. ad AR. & vt AS. ad AR. ita GH. ad HL. erit vt GH. ad HM. ita GH. ad HL. æquales igitur sunt HM. HL. sed & maiores sunt anguli GHI. IHM. id est FAQ. EAQ. angulis GHK. KHL. (nam maioribus secantibus maiores respondent anguli) maius est latus GH. latere HM. (nam anguli IHG. maioris quam IHM. minus est complementum HGI. complemẽto HMI. ideoque minus latus HM. latere HG. & HL. quam HG.) Quare cum duo triangula GHM. GHL. habeant duo latera GH. HM. duobus lateribus GH. HL. æqualia vtrumque, vtrique, in eodem vero triangulo inæqualia, angulusque compræhensus GHM. maior sit compræhenso GHL. ex quibus in oppositas bases perpendiculares demissæ sunt HI.

19. 1.

HK.

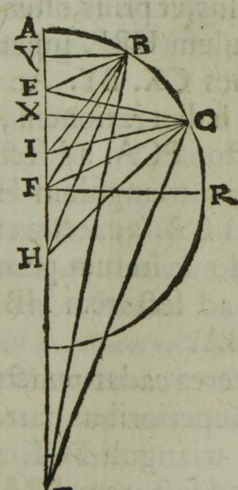
HK. erit, per 14. secundi huius, minor ratio anguli GHI. ad angulum IHM. id est FAB. EAB. quam anguli GHK. ad angulum KHL. id est quam DAQ. ad CAQ. Quod erat demonstrandum.

14. 2. huius.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

SI à puncto in quo semidiameter quadrantis peripheriam secat duo arcus inæquales accipiantur, ad quos, ex quibuslibet punctis eiusdem diametri productæ duæ rectæ ducantur, facientes duos sectores: sectores quos rectæ ductæ ex punctis remotioribus ab extremitate diametri cum arcubus quadrantis efficiunt, minorem habent inter se rationem, quàm quos efficiunt ductæ ex punctis propinquioribus, si maiores cum minoribus comparentur.

Sit Quadrans circuli FAK. cuius centrum F. semidiameter FA. secans peripheriam in A. puncto, a quo sumantur in Quadrante duo arcus maior AC. minor AB. Hinc in diametro AF. producta sumantur quotlibet puncta D. H. extra quadrantem, & I. E. intra quadrantem, ac ducantur tam ex centro, quam ex singulis punctis, duæ rectæ ad puncta B. C. Dico sectorem DCA. ad sectorem DBA. minorem habere rationem,



tionem, quàm sectorem HCA. ad sectorem HBA. & hunc minorem, quam sectorem FCA. ad sectorem FBA. Denique hunc minorem quam quemlibet superiorem, Superiores autem, eo minorem, quo magis puncta IE à puncto A. remouentur. Ducantur sinus recti BY. CX. Quoniam triangula DCF. DBF. eandem basim habent DF erunt inter se vt altitudines. CX. BY. Eodem modo cum triangula HCF. HBF. habeant eandem basim HF. erunt vt eædem altitudines CX. BY. Quare erit vt triangulum DCF. ad triangulum DBF. ita triangulum HCF. ad triangulum HBF. maius autem est triangulum DCF triangulo DBF (vt ad finē huius ostendemus) & triangulo HCF. & sector FCA. maior sectore FBA. Quare si ad primum triangulum. DCF. & ad tertium HCF. addatur eadem quantitas, nimirum sector FCA. componētur duo sectores DCA. HCA. si vero ad secundum triangulum DBF. & quartum HBF. addatur sector FBA. conflabuntur sectores DBA. HBA. Igitur, per decimam propositionem primi huius, minor erit ratio sectoris DCA. ad sectorem DBA. quam sectoris HCA. ad sectorem HBA.

1. 6.

10. 1. hui.

Rursus, vt prius, ostendemus esse vt triangulum HCF. ad triangulum HBF. super eadem basi HF. constituta, ita altitudines CX. BY. At vero sinus CX. ad sinum BY. minorem habet rationem, quam arcus CA ad arcum BA. id est, sector FCA. ad sectorem FBA. Igitur minorem habet rationem triangulum HCF. ad triangulum HBF. quam sector FCA. ad sectorem FBA. & permutando, ac componendo & iterum permutando, minor erit ratio sectoris HCA. ad sectorem HBA. quam sectoris FCA. ad sectorem FBA.

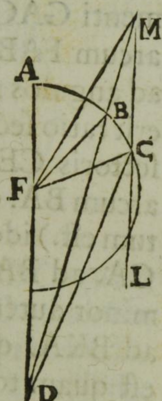
1. 6.
corol. 1. 28. 1. huius.
33. 6.

Præterea cadat punctum I inter F. & A. Eodem modo quo in superioribus partibus, ostendemus minorem esse rationem trianguli FCI. ad triangulum FBI. quam sectoris FCA. ad sectorem FBA. cum igitur maior sit ratio totius FCA. ad totum FBA. quam partis FCI. ad partem FBI.

reliqui

reliqui ſectoris ICA. ad reliquum IBA. maior erit ratio, quam totius FCA. ad totum FBA. 33. 5.

Denique ſumpto puncto E inter I. & A. cum oſtenſum ſit ſæpe ſuperius, minorem eſſe rationem trianguli ECI. ad triangulum EBI. quam ſectoris FCA. ad ſectorem FBA. & in tertia parte huius demoſtratum ſit, minorem eſſe rationem ſectoris FCA. ad ſectorem FBA. quam ſectoris ICA. ad ſectorem IBA. minor erit ratio trianguli ECI. ad triangulum EBI. quam ſectoris ICA. ad ſectorem IBA. Cum igitur maior ſit ratio totius ſectoris ICA. ad totum ſectorem IBA. quam partis ECI. ad partem EBI. erit reliqui ſectoris ECA. ad reliquum EBA. maior ratio quam totius ICA. ad totum IBA. Quod erat demonſtrandum Quod autem triangulum DCF. ſit maius triangulo DBF. perſpicuum eſt; Ducta enim ipſi AD. parallela LCM. producatur DB. dum concurrat in M. & ducatur FM. perſpicuum eſt quod punctum M. cadet extra circulũ eritq; triangulum DBF pars trianguli DMF ideoque minus, æquale autem eſt triãgulum DMF triangulo DCF. minus igitur eſt triangulum FBD. triangulo DCF. 38. 1.



SCHOLIVM.

Sectorem hic vocamus, improprio nomine, triangulum ex duobus rectis, & circulari conſtitutum, qualis eſt figura DCA. duabus rectis DC. DA. & tertia qualibet circulari AC terminata, eo quod ſimilitudine verum ſectorem referat, ab Euclide lib. 3. definitione nona, deſcriptum, qui angulum rectilineum, aut in centro, aut in peripheria circuli ſubtendentis conſtitutum habet; qualis eſt hic figura LCB, cuius rei lectorem ad monitum eſſe voluimus, ne ὁμωνυμία ambiguitatem pariat.

THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

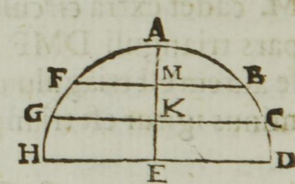
SEgmentorum in ſemicirculo, maioris ad minus maior eſt ratio, quam arcus maioris ad minorem.

Sit circulus ABC. cuius centrum E. diameter HD. ac in ſemicirculo HAD. ſumantur duo ſegmenta FAB. GAC. illud minus, hoc maius. Dico maiorem eſſe rationem ſegmenti GAC. ad ſegmentum FAB. quam arcus GAC. ad arcum FAB. Secent duæ chordæ BF. CG. diametrum AE. ad angulos rectam in punctis M. K. & ducatur KB. maior erit ratio ſectoris ſeu figuræ CKA. ad ſectorem BKA. quam ſectoris CEA. ad ſectorem BEA. id eſt quam arcus CA. ad arcum BA. (hoc enim in ſuperiori propoſitione demonſtratum eſt.) ideoq; minor eſt ratio arcus CA. ad BA. quam CKA. ad BKA. minor autem eſt etiam ratio CKA. ad BKA. quam CKA. ad BMA. id eſt quam totius ſegmenti CAG. ad totum ſegmentum BAF. Igitur minor eſt ratio arcus CA. ad arcum BA. id eſt dupli CAG. ad duplum BAF. quam ſegmenti CAG. ad ſegmentum BAF. Eodem modo ducta ſemidiametro HED. oſtendemus minorem eſſe rationem arcus ſemicirculi DAH. ad arcum CAG. quam ſegmenti ſeu ſemicirculi DAH. ad ſegmentum CAG.

22. 2. huius.

8. 5.

15. 5.



THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

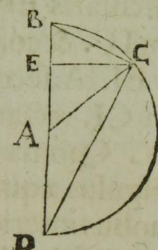
IN omni triangulo rectangulo inæqualium laterum lateris minoris ad baſim minor eſt ratio, quam baſis ad vtrumque latus; & maioris lateris

ris ad basim maior est ratio quam basis ad vtrumq; latus.

Sit triangulum rectangulum BCD. cuius basis BD. latus minus BC. maius CD. Dico minorem esse rationem CB. ad BD. quam BD. ad vtrumq; BC. CD. & maiorem esse rationem CD. ad BD. quam BD. ad vtrumque CB. CD. Ex angulo recto C. in basim demittatur perpendicularis CE. erit BE. segmentum minus segmento ED. sed & EC. minor est quam ED. (est enim vt BC. minor ad CD. maiorem ita CE. minor ad ED. maiorem) addita ergo communi EB. maior erit tota DB. quam CE. EB. simul. Igitur minor est ratio CB. ad BD. lateris scilicet minoris ad basim, quam CB. ad BE. EC. simul, id est quam basis DB. ad CB. DC. vtrumq; latus simul. Rursus cum maior sit DC. quam CB. id est CE. quam EB. addita communi ED. maiores erunt DE. EC. quam tota DB. Igitur maior est ratio CD. ad BD. lateris scilicet maioris ad basim quam CD. ad DE. EC. simul id est DB. basis ad DC. CB. vtrumq; latus simul. Quod erit demonstrandum.

Schol. in 4. 47.1.

8. 6.



8. 5.

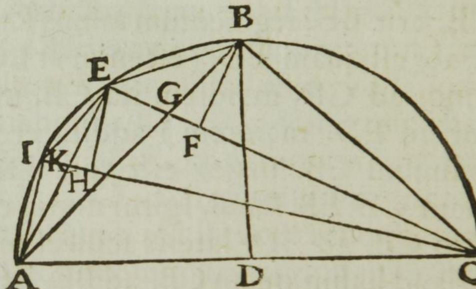
8. 6.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXV.

Dvarum rectarum, quæ in semicirculo angulum rectum continent maximę sunt quę inter se æquales, inæqualium vero quæ æqualibus viciniores, maiores sunt quam quæ remotiores.

In semicirculo ABC. cuius centrum D. ducta diametro AC. & semidiametro DB. ad eam perpendiculari: Ducãtur AB. CB. item AE. EC. & AI. IC. in semicirculo, quarum

illæ primis AB. CB. ſint viciniores, iſtæ remotiores. Cum in triangulis ADB.CDB. duo latera AD. DB. duobus CD. DB. æqualia ſint, & anguli ad D. compræhenſi recti, ideoque æquales, æquales erunt baſes AB. CB. Dico maiores eſſe AB. CB. ſimul, duabus AE. CE. ſimul & ipſas AE CE. ipſis AI. CI. ſimul eſſe maiores. Ducatur enim perpendicularis BF. in rectam CE. & connectatur BE. EA. ſecetque recta CE. rectam AB. in G. Item ducatur perpendicularis EH. in rectam IC. & connectãtur EI. IA. ſecetque recta CI. rectam EA. in K. Quoniam AGC. angulus æqualis eſt duobus interioribꝰ, & oppoſitis GBC. BCG. eſtque GBC. rectus, erit AGC. obtuſus, ac proinde BGC. acutus, cadet igitur BF. perpendicularis inter puncta GC. eſtque BG. ſubtendens rectum angulum F. maior ipſa BF. Iam in triangulo BFE. Quoniam angulus BEC. eſt ſemirectus (inſiſtit enim ad circumferentiam quadranti BC.) & angulus ad F. rectus, erit etiam FBE. ſemirectus: æqualia igitur ſunt latera FE. FB. Cum igitur latus CB. ſubtendens rectum F. ſit maius latere CF. ſi æqualia addantur BF. FE. maior erit CB. BF. ſimul quam tota CF. FE. multo igitur maior erit CB. BG. quam CE. cum BG. oſtenſa ſit maior quam BF. Cum vero AG. ſubtendens angulum rectum AEG. ſit maior quam EA. ſubtendente acutum EGA. ſi ad CB. BG. quæ ſunt maiores quã CE. addatur AG. maior, & ad CE. addatur EA. minor erunt CB. BG. GA. id eſt duæ rectæ CB. BA. ſimul maiores duabus rectis CE. EA. Quod erat primo demonſtrandum. Rurſus eodem modo quo ſupra oſtendetur cadere perpendicularẽ EH. inter C. & K. & quod angulus



[Margin: 4. 1. — 32. 1. — 31. 3. — 13. 1. — 19. 1. — 20. 3. — 5. 1. — 19. 1. 4. pron.]

AKC.

AKC. ſit obtuſus, ac proinde EKH. acutus, quare maior erit EK. quam EH. Rurſus in triangulo rectangulo EHI. angulus EIH. ſeu EIC. innixus arcui EC. (qui maior eſt quadrante) eſt maior ſemirecto, minor igitur eſt IEH. ſemirecto maius igitur eſt latus EH. latere IH. Nunc eadem prorſus ratione qua ſuperius, oſtendemus, cum CE. ſit maior quam CH. ſubtendens ſcilicet angulum rectum ad H. & maior etiam oſtenſa ſit EH. quam HI. maiores eſſe CE. EH. ſimul quam CH. HI. quare multo maiores erunt CE. EK. ſimul (cum EK. ſit maior quæ EH.) quam CH. HI. ſi igitur inæqualibus CE. EK. ſimul, & CH. HI. ſimul, addantur inæquales, illis maior KA. ſubtendens angulum rectum KIA. iſtis minor IA. ſubtendens angulum acutum in eodem triangulo KIA. erunt rectæ CE. EK. KA. id eſt duæ CE. EA. ſimul, tribus CH. HI. IA. ſimul id eſt duabus CI. IA. maiores. Quod quærebamus demonſtrare.

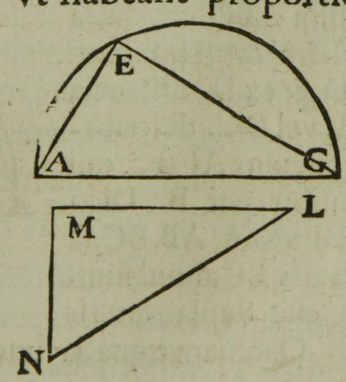
20. 3.
32. 1.
19. 1.
19. 1.
31. 3.

Atque ita deinceps oſtendetur quo linea ex puncto C. ad circumferentiam BA. ducta erit remotior à linea CB. eſſe ſimul cum reliqua ad A. ducta, minorem viciniori, vt CI. IA. minores ſunt quam CE. EA.

PROBLEMA I. PROPOS. XXXVI.

IN ſemicirculo ex punctis extremis diametri chordas ita inflectere vt habeant proportionem datam.

Sit datus ſemicirculus AEC. cuius diameter AC. eiuſque extrema A. C. & proportio data rectæ LM. ad MN. oportet duas chordas ex AC. ita inflectere vt habeant proportionem LM. ad MN. Componatur MN. cum recta ML.



in angulum rectum & ducatur LN. & fiat vt LN. ad NM. ita CA. ad AE. & aptetur AE. adcirculum AB. connectaturque CE. Dico esse vt LM. ad MN. ita CE. ad EA. Quoniam æqualis est angulus AEC. angulo NML. rectus, recto, in triangulis AEC. NML. & circa angulos EAC. MNL. latera proportionalia, ex hypothesi, est enim vt LN. ad NM. ita CA. ad AE. & quilibet reliquorum angulorum ECA. MLN. minor recto æquales erunt anguli CAE. LNM. sed & æquales sunt recti ad M. & E. igitur æquales sunt reliqui ad C. & L. erit igitur vt LM. ad MN. ita CE. ad EA. Quod demonstrandum erat.

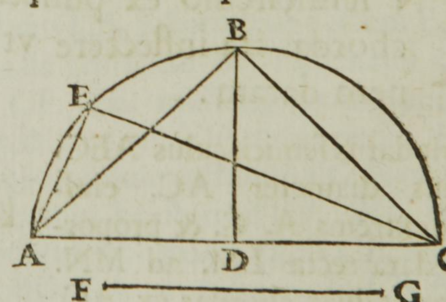
7. 6.
32. 1.
4. 6.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXVII.

SI sint duo quadrata alterius quadrati dupla, si quidem sint inter se æqualia, habebunt eorum latera ad istius latus proportionem duplam, si inæqualia habebunt eorum latera ad istius latus minorem proportionem dupla, sed maiorem quam diameter quadrati ad costam.

Sit quadratum FG. ad quod quadrata æqualia AB. BC. simul sumpta habeant proportionem duplam. Inflectantur AB. BC. ad angulum rectum ABC. & ducta AC. diuidatur bifariam in D. & ex D. distantia DA. vel DC. describatur circulus AEBC. qui transibit per B. Dico quadratorũ, AB. BC. latera AB. BC. simul sumpta esse dupla lateris FG. Quoniam æqualia sunt AB. CB. & angulus ABC. rectus,

Schol. 31. 3.



ctus, constat AB. BC. esse latera quadrati, & AC. eius diametrum. Rursus quoniam æqualia sunt quadrata AB. CB. erunt AB. CB. quadrata simul dupla ipsius AB. sed ponuntur etiam dupla ipsius FG. æqualia igitur sunt quadrata FG. AB. & æqualia latera FG. AB. Quoniam verò æqualia sunt quadrata AB. CB. æqualia igitur sunt latera AB. CB. igitur AB. BC. sunt ipsius AB. id est FG. illi æqualis duplicia.

7. Pronunc.

Rursus sint duo quadrata inæqualia AE. EC. illud minus, hoc maius quæ ad idem quadratum FG. habeant rationem duplam Inflectãtur AE. EC. in circulo ita vt habeant proportionem quam latera quadratorum AE. EC. Quoniam æquale est quadratum AC. quadratis AB. BC. & quadratis AE. EC. erunt quadrata AB. BC. & AE. EC. simul æqualia, illa verò sunt dupla quadrati FG. Igitur & ista sunt dupla quadrati FG. datis æqualia, quorum latera AE. EC. cum maiora sint quam AC. diameter quadrati, & minora quam AB. BC. (quæ ad AB. id est FG. habent rationem duplam) vt penultima huius ostensum est; ideo laterum AE. EC. ad latus FG. maior erit ratio, quam diametri quadrati AC. ad costam AB. sed minor quam dupla. Quod probandum erat.

Præced. prop.

47. 1.

20. 1.

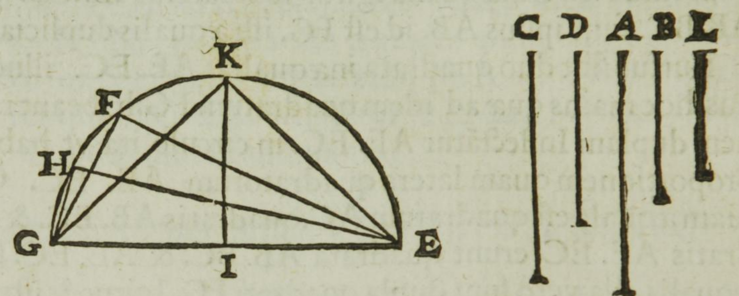
Penult. huius.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XXXVIII.

SI duo quadrata inæqualia simul dupla sint alterius quadrati, & alia duo inæqualia simul etiam dupla eiusdem quadrati, habeat autem ex duobus prioribus quadratis æqualibus latus maioris, ad latus minoris maiorem rationem, quam ex duobus posterioribus latus maioris ad latus minoris; habebunt latera priorum simul ad latus alterius cuius quadrata sunt dupla minorem rationem, quã latera posteriorum simul ad idem quadratum.

Sint

Sint duo quadrata inæqualia A. maius B. minus quæ simul sint dupla quadrati L. Item alia duo C. Maius D. minus simul dupla eiusdem quadrati L. Habeat autẽ A. quadratum ad B. Quadratum maiorem rationem quam C. quadratum ad quadratum D. Dico latera A. B. simul ad latus L. mi-



norem habere rationem, quam latera CD. simul ad idem latus L. Describatur semicirculus GKE. centro I. ex quo educatur ad angulos rectos semidiameter IK. & fiat vt A. ad B. ita EG. ad GH. & vt C. ad D. ita EG. ad GF. & connectatur EH. EF. Erunt tam quadrata GH. HE. simul, quam GF. FE. simul dupla quadrati GK. (vt ad 37. huius ostensum est). Quare vt quadrata A. B. ad quadratum L. ita quadrata GH. HE. ad quadratum GK. & vt quadrata CD. ad idẽ quadratum L. ita quadrata GF. FE. ad quadratum GK. vt ergo latera A. B. ad latus L. ita latera GH. HE. ad latus GK. atque vt latera CD. ad latus L. ita latera GF. FE. ad latera GK. Cum verò ponatur vt A. ad B. ita EG. ad GH. & vt C. ad D. ita EG. ad CF. maior autem sit ratio A. ad B. quam C. ad D. maior erit ratio EG. ad GH. quam EG. ad GF. minor igitur est GH. quam GF. ergo minores sunt GH. HE. simul quam GF. FE. simul, maior igitur ratio est GF. FE. simul ad GK. quam GH. HE. simul ad GK. quare C. & D. simul maiorem rationem habebunt ad L. quam A. B. simul ad eandem L.

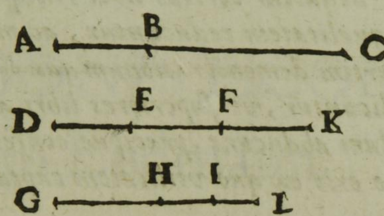
36. huius. *22. 6.* *10. 5.* *35. huius.*

THEO-

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XXXIX.

SI prima quantitas ad ſecundam; item tertia ad quartam habeat rationem maiorem data, habebunt compoſitæ antecedentes, ad conſequentes ſimul, rationem maiorem data.

Sit ratio data AB. ad BC. ſit autem maior ratio DE. ad EF. quam AB. ad BC. & maior ratio GH. ad HI. quam AB. ad BC. fiat vt AB. ad BC. ita DE. ad EK. quæ maior erit ipſa EF. Item fiat vt AB. ad BC. ita GH. ad HL. quæ etiam maior erit quam HI. Dico maiorem eſſe rationem, ipſorum DE. GH. ſimul, ad ipſas EF. HI. ſimul quam AB. ad BC. Quoniam eſt vt DE. ad EK. ita AB. ad BC. & vt AB. ad BC. ita GH. ad HL. erit ex æqualitate, vt DE. ad EK. ita GH. ad HL. Igitur DE. GH. ſimul ad EK HL. ſimul ſunt vt DE. ad EK. Ablatis igitur ex conſequentibus duabus quantitatibus, partibus FK. IL. maior erit ratio ipſarum DE GH. ſimul ad minores EF. HI. ſimul quam earumdem DE. GH. ſimul ad maiores EK. HL. ſimul: ſed vt DE. GH. ad EK. HL. ita AB. ad BC. maior igitur eſt ratio ipſarum DE. GH. ſimul ad EF. HI. ſimul quam datæ AB. ad datam BC.



10. 5.

12. 5.

8. 5.

Schol. 13. 5.

COROLLARIVM. I.

IDem ſequitur ſi quantitates habeant rationem minorem data, nam etiam compoſitæ antecedentes ad conſequentes ſimul habebunt rationem minorem data.

COROLLARIVM II.

Neque hoc tantum in quatuor, ſed in quotcumque magnitudiuibus demonſtratur, ſemper enim oſtendetur compoſitas antecedentes, ad compoſitas conſequentes habere rationem maiorem, aut minorem data.

Atque in duobus hiſce libris vniuerſam proportionum inæqualitatem, quæ ad rem noſtram facere videbatur, complexi ſumus, cuius quidem inſignem vſum, non in hoc opere ſolo, ſed in pluribus alijs quæ luci deſtinamus, vtinam mihi oſtendere, tibi intueri, mi lector, tardiora ſinant fata.

Sequitur tertius liber, in quo proportiones ferme omnes ad æqualitatem reducuntur, ac materiam continent earum præſertim demonſtrationum quæ δεικτικαὶ græcis, noſtris oſtenſiuæ, dicuntur, vt ſuperiores libri ad eas præſertim quæ ad abſurdum abducunt, præcipue conferunt. Hunc ſi perlegeris, forte erit ex quo vtilitatem captas non vulgarem.

VINDICIÆ
PRO VERITATE
SEV ANTAGONISTICON
In C. Mallium Eudoxum.

AD LECTOREM.

ANTAGONISTICON hic instruimus, mi Lector, sed innoxium, stylum stringimus, sed incruentum; æmulum aggredimur, non hostem, cuius nomen anagrammatismo inuertimus, cognomen græco pallio induimus, ne, quod minime volumus, famam eius eleuemus, modestia saltem superiores futuri, si non causa. Euomuit ille ante duos annos libellum in quemdam moribus & doctrina præstantissimum Peripateticum, meque longe inferioris tribus Mathematicum; sed illum pluribus ijsq; longe turpissimis, me paucioribus minusque propudiosis contumelijs lacessit, ac non sine quadam, inre iniquissima, æquitatis specie excellentiori virtuti sæuius bellum indicit, minorem minus acriter insectatur. Nihilominus illius nomen, in cuius maxime

xime caput maledictorum tela intentabat, penitus subticet, me solum nomine, cognomine, patria, ne quæ desint ad cognitionem symbola, graphicè designat. Cur tandem? Ego quidem illud metu, hoc contemptu accidisse suspicor. Verebatur forte ne si potentioris nomen contemptius vsurparet humeris linguæ proteruiam, ac oris impuritatem lueret, & à bono quopiam Omemetra malus Geometra male mulctaretur; de me autem meoq; ingenio forsan acceperat, nec nocere posse si vellem, nec velle si poßem. Hic ergo omissis dissidij causis, quibus suam causam infirmari, ac existimationem labefactari non nesciebat, Pythagorico supercilio, ac sola verborum quæ αὐτὸς ἔφα, authoritate, mihi aut inscitiæ aut malignitatis notam inurere conatus est. Primum non diffiteor neq; dedecori duco; vitium id est, cuius (si quod inest) probrum aut plurimum minuit communio, aut penitus tollit naturæ conditio. Quotusquisq; enim est eorum qui recte sapiunt qui nesciat, immo qui hoc ipsum sciat se, ac mortalium plærosque omnes nihil scire: aut si quid sciat, quod Mathesi forte acceptum ferre potest, id vero adeo exiguam esse partem eorum quæ nesciat, vt iam penitus ignarus sit ni vltro concedat se esse ignarum, Alterum vero constanter nego, eiusq; causa aduersario iniuriarum dicam scribo: doli mali crimen est quod affingitur turpe, nefarium: detestabile; cuius me cum in omni vita immunem fuisse norunt quot quot me norunt; tum vero eo tempore quo me eius insimulat, dum simultates mecum exercet Eudoxus, ne suspicione quidem ac coniectura coarguendum fuisse fateberis, bone Lector, si mecum otiose ac patienter dissidij causam atq; originem inspexeris, & rem totam à carceribus quod aiunt, ad calcem reuocaris. Atque id quidem ad propositiones nonam, decimam, aut vndecimam huius, in quibus belli seminarium delitescit, aperiendum erat, illic classicum canendum, & calamus ad iustam defensionem armandus erat; sed vt verum fatear, non solum pigebat lectorem ab vtili lectione ad inutile spectaculum, ac tanquam ab Academia ad Arenam auocare, sed pudebat virum studiosum Mirmillonem agere, ac puluerem literarium iurgioso atramento fœdare. At vrgeor, vis infertur, quid agam? num digitum tollam, arma submittam, ac Salmacide ignauior spolia concedam sine sudore & sanguine? Consultius hoc forte quidem esset in hoc certaminis genere in quo, vt sapienter Demosthenes, vincit qui vincitur, ac inferior est, qui superior cesserit; idq; omnino agerem, ni eam mihi vitæ conditionem ac veluti stationem fortuna assignaßet quam tueri sine hominum existimatione (quæ bonis viris

sine

sine vita, quam sine ea vita, potior eße debet) nulla ratione poßum. Ea vero impetitur, atq; acriter impugnatur, igitur vindicanda est, ac omni si opus fuerit πανοπλία defendenda. Humanum est in eos qui humanitatis obliuiscuntur esse inhumanum, ne veterem iniuriam ferendo inuites nouam, ac, quod est in prouerbio, si in ouem degeneres, luporum, aut Lycanthroporum potius in te feritatem prouoces. Neque tamen muliebri impotentia in conuitia prorumpam, aut ex Suburræ fornicibus potius quam ex Stoæ porticibus arma depromam,

> Εἶ κε ςυγὸς θύγαθερ, πολέμου καὶ δηιοτῆτος
> Οὐχ ἅλις ὅττι γυναίκας ἀνάλκιδας. ἠπεροπεύεις;

Sed prætextata veritate stipatus id agam tantum vt suam calumniæ personam detraham, totaq; re tanquam in Areopago candide exposita, iudicio tuo neque verborum lenocinijs corrupto, neq; amplificationum machinis expugnato citra vllam prouocationem stabo. Confido autem adeo liquido auspicio causam hanc à me susceptam, vt vel improbitas ipsa illi vltro candido atq; integro calculo sit suffragatura. Docuit annis superioribus in Patauina Academia Mathesin vir triplici scriptorum, maiorum, morumq; gloria ter Gloriosus. prima vt non infimum ei inter Mathematicos, ita sua æstimatione longe inferius Nomen comparauit. A secunda Cognomen accepit splendidum, splendorem nullum. Tertia Agnomen indidit quod Plautinus Pyrgopolynices, Terentianus Thraso, recentior Scarabombardonides inuidere posset: adeo magnifice de se sentire, ac Tragice loqui dicitur. Audio enim iucundissima fraude quondam sibi ipsi imposuisse qui Mathematici nomen mereretur præter se reperiri neminem, ac vnum se inter mortales qui docendæ Matheseos prouinciam pro dignitate obire valeret: adeo autem alte menti paralogismum illum insedisse vt ne tribus quidem Anticyris elui poßit. Vix credam ita eum credidiße; neque si credidit, consultum vel curatoribus suis duxero eum blandissimo hoc morbo liberare, ne quod ille quondam φρενοβλαβὴς à seruatoribus suis perditum sese exclamet, ac redditæ sanitatis beneficium in maleficij loco ducat. Hoc tamen asseram tunc, ni me opinio fallit, fuiße in viuis Marinum Ghetaldum, Alexandrum Andersonum, Ioannem Neperum, & adhuc superstites eße Christophorum Gruenbergium, Claudium Bachetum, Henricum Briggium, Io. Keplerum, Vvillebrordum Snellium, quos qui Mathematicos nega-

rit, næ ille in alio mundo natus, ac Mathematicum ne pictum quidem aut fictum vnquam vidisse videatur. Addo nullum viri istius tunc opus extitiße quod palmarium censeri, ac dignum cognomini nomen tribuere posset. Qui enim extabat de Cometis tractatus ex varijs variorum authorum sententijs apte concinnatus authori quidem suo ornamento erat, hunc tamen centonem qui trabeam dixisset, ac inde Mathematicorũ Imperatorem coniecisset, annon ille Glaucum æstimandi imperitia superaßet? Quanto illi interuallo, mea quidem sententia, hac in re præferendus Scipio Claramontius, insignis & Philosophus & Mathematicus, qui decumana Tychonis Brahe machinamenta ne gry quidem reformidans, ac contra immanem quæ in omnium animis de nouo illo Athlante inualuerat opinionem ingenij vigore, ac demonstrationum ope eluctatus, Cometas nouaque astra quæ ille parum legitima ἀποθεώσει *in cœlestia corpora retulerat, ac stellarum ciuitate donarat, in ordinem redegit, aut ita redegiße visus est, vt de re, quam præcox hominum credulitas indubitatam fecerat, non sine ratione dubitare possis: de qua etiam aliquando, Deo fauente, meum iudicium qualecumq; illud sit interponam. Sed hæc forte ferenda fuissent ni Salmonei temeritate etiam maiorum gentium Deos æmulari, atq; ex inglorio adhuc Mathematico in gloriosum Peripateticum, immo & Peripateticorum superciliosum Aristarchum euadere tentaßet. Sed*

Dum fulmen Iouis, ac sonitus imitatur Olympi

iusto in FORTVNIO, LICET, O *Lector, admodum benigno vltricem audaciæ suæ* NEMESIN *expertus est. Nam vir doctrina insignis in Controuersijs de cometarum quiete, loco Boreali, ac parallaxi Aristotelea*

——————densa inter nubila telum
Torsit (non velut ille faces, ac fumea tædis
Lumina) præcipitemq; immani fulmine adegit.

Prodierunt postea in lucem exercitationes Mathematicæ, quæ tum primum ampullas immanes non omnino inanes, suumq; authorem non iam Ματαῖον *sed* Μαθηματικὸν *prodiderunt. Licet enim scopis dißolutis,*

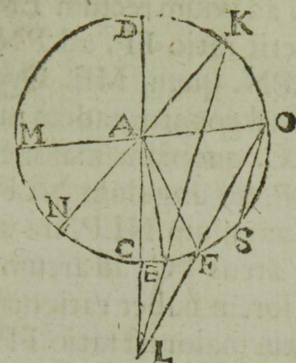
que

ac emissarijs variorum temporum palmitibus similia nonnullis visa sint quæ ibi promit, neq; ordine connexa, neq; in vnum vnius operis finem conspirantia: ego tamen in tanta collectaneorum frequentia, furtorum licentia, canonum inani copia quibus pleraq; recentiorum Mathematicorum scripta laborant non potui non probare quę iste protulit, & rerum momento vtilia, & varietate iucunda, sed proprietate præsertim inuentionis rara, sit enim veritati, quam profiteor, suus locus, noua sunt pleraque licet non omnia, boni ingenij non improbi tantum laboris partus, sui peculij quæstus non alieni raptus. Atq; vtinam illum hac in re imitarentur quos insanus tabularum calculus vexat, quique consuendis in monstrosas vestes priorum authorum scrutis inuigilant, ac denique toti in eo sunt vt Pandectarum sartura Scombris tunicas parent, melius ecquidem rei Mathematicæ consultum esset, neque illa indigestorum operum, ac superuacaneorum voluminum mole laborans tardius ad suum incrementum properaret. Sed de hominis gloria satis; nunc propius ad rem nostram. Cum vir iste in Patauino Gymnasio prima stipendia meruisset, de secundis cum Illustrissimis Academiæ moderatoribus conuenire non potuit, vt qui suæ operæ pretium sua de seipso opinione metiretur. Agunt quidem humanissimi Domini omnia, vt virum quem in pretio habebant retineant, rationes omnes adhibent quibus peruicacem animum subigant, conditiones proponunt æquissimas, sed respuit ille, omnes præter suam, cui ὥσπερ λεπὰς προσίσχεται, ratus fortassis necessitate coactos in eam tandem venturos. Sed læsa obstinatione patientia in iustam indignationem vertitur, abdicatur inscio prouincia, cogitatur de alio, accersor ego Roma, aduolo, stupet ille tanquam fulmine ictus, & qui se vnicam illam auem arbitrabatur miratur qnibus ex latebris alia prodierit, statuit tandem vt erat tam aliorum contemptor, quam sui admirator, Phœnicopterum esse, qui verum Phenicem colore tantum ementiatur, aut de genere accipitrum degenerem Cucullum, qui cum proprio careat, alieno in nido parere velit. Hinc metus, ne quem videri volebat fastidire, re autem ipsa maxime appetebat, bolum alius ex faucibus eriperet. Quare in Seplasio (hæc illi curia erat) suorum Senatum cogit, narrat aduenisse fucum qui in aluear non suum inuolare velit: rogat quid agendum vt ignauum pecus à præsepibus arceatur; variant sententiæ, in hanc tandem pedibus itur, quæ etiam consulto sancitur, vt mihi quæstio proponatur ex adytis Matheseos deprompta noua, ἀναποδεικτική, quam quia soluturus non essem, id enim tanquam ex tripode pronunciabant, ac

futurum

futurum omnino vel sponsionibus certare parati erant, (adeo certo præiudicio hominem cuius doctrinam ignorabant ignorantiæ damnabant) tum demum Censoria virga notatus publice capite diminuerer, ac in ærarios Matheseos Professores ablegarer; hinc essent qui omnibus neruis contenderent, vt atris Rogatorum calculis cum dedecore in vltimas terras abigerer. Sic in Panegyri illa omnium ordinum consensu statutum de homine ignoto, insonte, indicta causa, qui, ita me Deus adiuuet, eo adueneram non vt in alienam possessionem inuaderem, sed vt vacuam occuparem, aut potius oblatam à veris Dominis acciperem; cui non magis notum erat Eudoxi nomen quam ἀδοξοτάτου cuiuspiam, quod iampridem elapsa sæcula obliterassent, aut olim ventura nondum prodidissent. Sed heus vos, o Patres in meam proscriptionem Conscripti; Hiccine verus gnomon ac libella qua Mathematicum probetis, aut germanus index quo adulterinum à genuino discernatis? An ignoratis per quos anfractus, ac sinuosas innumerabilium propositionum ambages ad conclusiones in Geometriæ veluti labyrintho deueniatur, quibus relegendis, sæpe ne centum quidem Ariadnes glomi sufficiant? nescitis demonstrationum Mathematicarum inuentionem sæpe improbo multorum annorum labori, aliquando Fortunæ, nonumquam peculiari Genio atq; ingenio tribuendam, in qua qui Dijs illis non litarit, frustra oleum & operam insumat? Quid si eodem æuo Euclides atque Archimedes vixissent, atque hic problema proposuisset quo parabolæ æquale quadratum inueniendum esset, num ille Mathematicus non fuisset si hoc absoluere non potuisset? Certe si Mathesin ignoratis, ignosco; at si in ea versati estis vereor ne malitiæ crimen (quod mihi postea hic iniuria affinxit) ego vobis iure tribuere possim. Hæc ego tunc; sed iustæ rationes in inanes excusationes trahebantur, risuq;, cachinnis, ac tantum non sibilis excipiebantur. Cum igitur animaduerterem non doctrinæ periculum fieri, sed famæ periculum creari, porrectoq; veluti calyce obnunciari mihi illud in adagio ἢ πῖθι ἢ ἄπιθι, animum tandem alijs cogitationibus distractum in hanc vnam colligo vt propositæ quæstioni satisfaciam, quod num assecutus fuerim decerne, mi lector, vt enim id præstare possis demonstrationum veritas quæ nullis opinionum nubibus inumbrata intaminatam ex clarissimis fontibus fundit lucem; vt velis, æquitatis studium, veritatis amor, omniq; gratia intemeratus animi candor efficiet. Erat autem huiusmodi Eudoxi manu scripta, vbi literas tantum mutauimus, vt eam ad nostrum schema aptaremus.

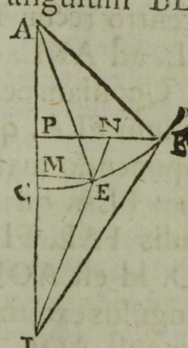
Si à puncto L. protractę diametri ducantur in cauam circuli peripheriam rectæ LK. LO. quæritur num arcus OK. KD. eandem, vel maiorem, vel minorem habeant proportionem quam angulus OLK. ad angulum KLD. tota expoſita apodixi.



Cui ego tribus potiſſimum propoſitionibus reſpondi, quæ ſunt huiuſmodi.

I.

SI à puncto protractæ diametri L. ducantur in conuexam peripheriam rectæ LF. LE. & ex centro circuli rectæ AF. AE. Dico maiorem eſſe rationem arcus FC. ad arcum EC. quam anguli FLC. ad angulum ELC. Ducantur ſinus recti FP. EM. & LE. producta ſecet PF. in N. Conſtat rectam PN. eſſe maiorem quam ME. Iam ſi non eſt maior ratio FC. ad EC, id eſt anguli FAC. ad EAC. quam anguli FLC. ad ELC. erit vel minor vel æqualis. Sit primum minor, ideoq; maior ratio FLA. ad ELA. quam FAC. ad EAC.



Quoniam FP. eſt tangens anguli FLP. & NP. tangens anguli NLP. maior erit ratio FP. ad PN. quam FLP. ad NLP. ſed FLP. ad NLP. ponitur maior quam FAC. ad EAC. & ratio FAC. ad EAC. maior eſt quam ſinus recti FP. ad

26.1.huius.

corol.1.28.
1.huius.

FP. ad sinum rectum EM. Igitur à primo ad vltimum maior erit ratio FP. ad PN. quam FP. ad ME. minor igitur est PN. quam ME. Quod est absurdum.

13.5. 10.5.

Sed ponatur eadem ratio FAC. ad EAC. quæ FLC. ad ELC. quoniam maior est ratio FP. ad PN. quam anguli FLP. ad angulum NLP. ponitur autem vt angulus FLP. ad angulum NLP. ita angulus FAC. ad angulum EAC. seu arcus FC. ad arcum EC. sed arcus FC. ad arcum EC. maiorem habet rationem quam sinus FP. ad sinum EM. Igitur maior est ratio FP. ad PN. quam FP. ad ME. ideoque minor est PN. quam ME. Quod est absurdum. Igitur cum neq; minor neq; æqualis sit proportio FAC. ad EAC. proportioni FLC. ad ELC. necesse est vt sit maior. Quod erat propositum.

26.1.huius. 13.6. coroll,1.28. 1.huius. 13.5. 10.5.

I I.

SI à puncto L. productæ diametri ducantur in cauam circuli rectæ LK. LO. secantes conuexam in E. F. & ex centro rectæ AK. AO. Dico maiorem esse rationem AOL. ad AKL. quam OLA. ad KLA. Ductis enim AF. AE. Quoniam permutando maior est ratio anguli FAL. ad angulum FLA. quam EAL. ad ELA. ex præcedenti, erit componendo maior ratio angulorum FAL. FLA. ad angulum FLA. quam angulorum EAL. ELA. ad ELA. sed angulis FAL. FLA. simul est æqualis angulus externus AFO. id est AOF. & angulis EAL. ELA. simul æqualis est angulus externus AEK. id est AKE. Igitur maior est ratio anguli AOF. seu AOL. ad angulum ALO. quam anguli AKE. id est AKL. ad angulum ALK. & permutando maior ratio anguli AOL. ad AKL. quam anguli OLA. ad KLA. Quod erat probandum.

32.1. 5. 1.

Si à

III.

SI à puncto L. productæ diametri ducantur in cauam circuli peripheriam rectæ LK. LO. sintq; eadem quæ prius. Dico angulum OAD. ad angulum KAD. id est arcum OD. ad arcum KD. maiorem habere rationem, quam OLA. ad KLA. Nam cum maior sit ratio AOL. ad ALO. quam AKL. ad ALK. erit componendo maior ratio vtriusque AOL. ALO. simul, id est ipsius DAO. externi illis æqualis ad ALO. quam AKL. ALK. simul id est ipsius DAK. ad ALK. & permutando maior ratio DAO. ad DAK. id est arcus DO. ad DK. quam ALO. ad ALK. Quod erat demonstrandum.

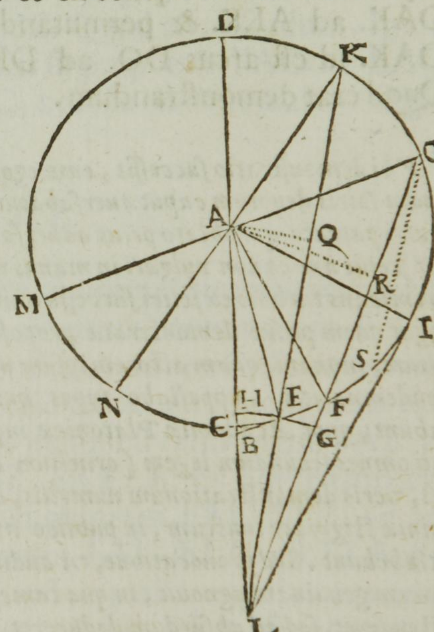
32.1.

Vbi demonstratio successit, eam ego non Eudoxo, me enim ille tanquam Diris deuotum caput auersabatur, sed Hippico (id nominis erat Patri patrato qui oblato prius aduersarij libello, mihi bellum indixerat) eius amico non vulgari in manus dedi, cui pallor in genas momento emicans turbati ex felici successu animi indicium non leue dedit. Hinc rogat quem probè demonstratæ propositionis iudicem esse velim; Non alium, inquam, quam actorem ipsum mihi infensum. Quid si ille te condemnarit? Appellabo typos qui mihi tot Rhadamantos suscitabunt, quot Academiæ Platonicæ ingreßu Geometria dignos reddit, qui omnes secundum legem Cornelium de falsis, hominem condemnantes, veris demonstrationum numellis, ac manicis constrictum, ac ignominiæ stigmate inustum, in publico literatorum foro catamidiandum exhibebunt. Sed prouocatione, vt audiui, opus non fuit, ille demonstrationem genuinam agnouit, in qua tamen hoc deesse dicebat, quod non ostenderet, sed ad absurdum deduceret, quæ res apud nonnullos Matheseos imperitos non demonstratæ propositionis instar erat, efficiebatq; vt non minus ignarus haberer, quam si nihil demonstrassem. Hic ego, vt verum fatear, labrum momordi, ac totus in vindictam exarsi. Quid, inquam, numquamne Philothersites iste me vltro vexare, atq; aliam ex alia molestiam nectere desinet? aut forte hic mihi cum Ioscpho Scaligero negotium est viro mortalium omnium ἀγεωμετρητοτάτῳ cui εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγὴ scopulus, eiusq; vsus violenta in Geometria Tyrannis

S esse

eſſe videatur? minime vero, prætextam exuit hoſtis, veteranus eſt ac inter Triarios non vltimus, quem liuor in pugnam accendit, non inſcitia: obuiam igitur eundum, ac toto corpore, omnibusq; vngulis reſiſtendum, pugnandum, vincendum, ſed quo pacto? Primum ſi opinioni, qua plæraque mortalium reguntur, ſatis fecero; hinc ſi iiſdem armis, quibus me hoſtis, ego hoſtem inceſſero, ac Herculea vltione, quo dedit malum illud ipſum reddidero. Igitur exertis ingenioli quantuliſcumq; viribus, aliam ἀπόδειξιν δειτικὴν *inuenio quæ erat huiuſmodi.*

Si à puncto protractæ diametri L. ducantur in conuexam peripheriam rectæ LF. LE. & ex centro circuli rectæ AF. AE. Dico maiorem eſſe rationem arcus FC. ad arcum EC. quam anguli FLC. ad angulum BLC. Ducatur recta LI. tangens circulum in puncto I. Item per puncta F. E. recta FB. ſecans AL. in B. (ſecabit autem cum angulus LAF. recto minor ſit, nam cum rectus ſit LIA. erit LAI. ac multo magis eius pars LAF. acutus, & in triangulo Iſoſcele AFE. angulus ad baſim AFE. acutus, quare angulis AFB. FAB. exiſtentibus minoribus duobus rectis concurrent AB. FB. ad partes B.) maior erit ratio ſectoris AFE. ad triangulum AEB. quam trianguli AFE. ad idem triangulum AEB. ſed ſector AFE. ad ſectorem AEC. adhuc maiorem habet rationem quam ad triangulum AEB. Igitur ſector AFE. ad ſectorem AEC. id eſt arcus FE. ad arcum EC. maiorem



32.1.

13.pron.
8.5.

33.6.

rem habet rationem, quam triangulum AFE. ad triangulum AEB. id est quam FE. ad EB. & conuertendo minor est ratio arcus CE. ad arcum EF. quam rectę BE. ad rectam EF. Eodem prorsus modo ostendemus maiorem esse rationem sectoris HLE. ad sectorem ELG. id est arcus HE. ad arcum EG. quam trianguli BLE. ad triangulum ELF. id est quam BE. ad EF. quare minor erit ratio BE. ad EF. quam arcus HE. ad arcum EG. Cum ergo minor sit proportio arcus CE. ad arcum EF. quam rectæ BE. ad rectam EF. & BE. ad EF. minor quam arcus HE. ad arcum EG. erit etiam minor ratio arcus CE. ad arcum EF. quam arcus HE. ad arcum EG. id est anguli LAE. ad angulum ELF. & permutando, ac componendo, maior ratio arcus FC. ad arcum EC. quam anguli FLC. ad angulum ELC. Quod erat demonstrandum. Hinc eodem modo quo secunda huius Apologiæ ostendebam maiorem esse rationem AOL. ad AKL. quam OLA. ad KLA. ac tandem ex tertia eiusdem, maiorem esse rationem arcus OD. ad arcum KD. quam anguli OLA. ad angulum KLA. Quod ab aduersario initio propositum fuerat.

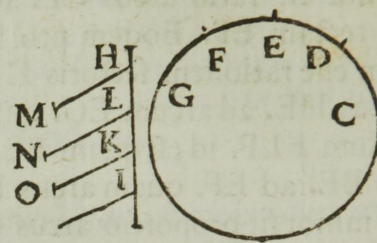
1. 6.

33. 6.

1. 6.

Hanc demonstrationem per alium internuncium Eudoxo porrigo. Quid dixerit ignoro. Interim ego totus in talionem vertor. Ignoscite superi, hæc ferme prima iniuria fuit quæ patientiam meam deflorauit, & in vindictæ conatum innocentiam meam impulit. Occurrebat quidem fortis animi esse contemnere contemptum, nec suum contumeliæ telum è manibus tutius extorqueri, quam vbi prudentia lacessita obmutescit, sed rationem vicit (nec tamen sine ratione) recentis, vt videbatur, iniurię sensus, cuius aculeum pati vel prudentes ac boni viri difficilime possunt. Quare non vt doctrinam eius probarem, sed vt probationis quam in me adhibuerat iniquitatem indicarem, quod ipse ministrarat telum in eum ipsum acuere cœpi, ac quo sphæram, (quod aiunt) redderem, sequētem, quæstionem quam potui difficilimam cudi, quam si quid in Mathematicis aduersarius valeret, demonstrari ab eo petij; adiecta etiam luculenta conditione, vt si demonstraret, ei loco controuerso, si ad eum aspiraret, sine controuersia cederem.

In circulo CDE. sumantur quatuor arcus CD. DE. EF. FG. sitque primus minor secundo, hic tertio, & tertius quarto, aut contra; & linea quæcumq; recta HI. ita diuidatur vt rectę IK. KL. LH. eandem rationem habeant quam differentia sinus versi arcus GF. ad differentiam sinus versi arcus FE. & huius differentia ad differentiam sinus versi arcus DE. & sic deinceps, & ductis parallelis IP. KO. LN. HM. possit recta IP. quadratum chordæ arcus GF. & duplum quadrati, aut quadratum sinus versi eiusdem arcus, atq; ita ordine de reliquis. Quæritur num per quatuor puncta P. O. N. M. duci possit linea vnica regularis, & cuiusmodi illa sit.



Hanc vbi accepit primo cessim ire, hinc tergiuersari, ac tandem respondere renuit, causatus proximum discessum: nec immerito vt enim erat Matheseos peritus ęnigma Boetico difficilius animaduertit, ad quod soluendum nescio quid Oedipo maius requirebatur. Prudenter igitur ire per extentum funem renuit, ne suo lapsu imperitis (nec enim apud iustos rerum æstimatores minoris habendus fuisset) risum moueret. Vt vero recens efferuescebat in æmulum ira (cuius vt verum fatear, virulentiam tempus decoxit) pauca quędam Theoremata Geometrica, quę cum vnico problemate Diophanti ediderat, sed minime vulgaria in manus meas tandem peruenerunt, quæ cœpi diligentius perscrutari, vt nodum si fieri posset, vel in scirpo ipso inuenire possem. Atq; vt Lynceos habet oculos vlciscendi libido, tria occurrerunt quę vibrarem tela, quę si non lethale vulnus inferrent, saltem cutem non sine doloris sensu perstringerent. Primum audieram non absq; Theseo suum illum Achillem, ita enim haberi volebat, laudem sibi comparasse. Secundo animaduerti in Theoremate determinato pagina nona linea 15. consequentiam non recte inferri ex ęquo, vt ipse habet, nempe ex 31. proposit. 5. Sed ex Scholio propor-

tionis

tionis 15. eiusdem quinti, vt intuenti manifestum erit. Deniq; occurrit in eadem propositione eum non omnes casus persecutum fuiße, sed tantum cum linea CD. circulum secat, non cum tangit. Ex illis igitur tribus capitibus hanc propositionem efformaui quam ei transmissi demonstrandam, vt suo quodammodo se gladio iugulare cogeretur. Propositum sit demonstrare Theorema determinatum à C. Mallio Eudoxo non fuisse recte demonstratum: quæ res cum in miram solicitudinem coniecit, cum latentem cuniculum deprehendere non posset. Atq; hęc est malignitas cuius me insimulauit Eudoxus, qui si tam recte animorum παθολογίαν, quam verborum κακολογίαν tenuisset, hanc potius ęquissimum talionem indigetasset, neq; iniuriam à me illatam conquestus, sed iustissime propulsatam confessus fuisset. Caueat autem ne si pergat acriorem iratę

In sese cieat Rhamnusidis iram.

Dum quod eius afflatu factum est Dirarum teterrimę stylo iniquissimo audet ascribere. Sed quid sentiendum, tu dixeris integerrime Lector, quam enim tibi ab initio hac de re, de qua potissimum lis contestata est, cognoscendi, ac pronunciandi potestatem, quod in me fuit, concessi, eandem nunc ratam habeo, iudicio tuo ne tantillum quidem refragaturus. At quęres quid re vera de illis Theorematis sentiam? Aio esse elegantissima, & quę vel sola suum authorem, quisquis ille sit, Geometrarum albo dignum reddere possint: quę vero negligentius aut omissa, aut immutata sunt parum aut nihil de eius laude detrahunt, cum facilime vel à mediocriter in rebus Mathematicis versato restitui possint.

Ridebis, generose Lector, homuuciones tanta contentione pro angusto Academiæ angulo tumultuantes. Recte id quidem, si Alexandrum ac Darium de Asię Imperio Cęsaremq; ac Pompeium de orbis dominatu contendentes riseris. Speciosior illis, non maior dissidij causa fuit. Nam rerùm humanarum magnitudinem non moles sed ęstimatio facit. Tanti mihi Patauinus suggestus quanti Pellęo iuueni, ac perpetuo Dictatori non vnus sed Democriticorum mundorum aceruus. Pro eo si pugnant, pugnamus & nos solo armorum genere, non pugnandi ardore differentes. Illi velitibus, nos prolusionibus prelium accendimus; illi eminus tela, non scommata iacimus; cominus illi hastis, ac gladijs, nos stylis ac calamis congredimur,

gredimur, legiones illi, nos rationes committimus. Vtrisque finis victoria, queque victoriam sequitur gloria, sed nostra eo sæpe maior quod in vnum caput collecta magis elucescat, illa amplissima communione in multa hominum millia dissipata dubio plerumque splendore effulgeat. Nempe sic voluit qui voluntatis nutu omnia condidit, vt non naturalia tantum, sed etiam humana lite & amicitia constarent, illa quidem vt benefica vnione seruarentur, ista ne noxio torpore corrumperentur; vt enim marcet sine aduersario virtus, ita æmulatione lacessita mirum quanta contentione ad egregia facinora feratur.

Tunc bene fortis equus reserato carcere currit,
Cum quos prætereat, quosve sequatur habet.

Testem hanc ipsam exhibeo Academiam, ac infinita prestantissimorum virorum, qui ex ea tanquam exequo prodierunt, opera, que forte eterno pressa gelu, in authorum, tanquam terræ visceribus delituißent, ni ea genialis æmulationis estus in fœcundum germen, ac vberrimos fructus exclusisset. Certe hoc quicquid sit operis tot linearum, triangulorum, circulorum schematismis refertum, non sine sumptibus qui censum meum longe superant, nescio an ego, nescio an antagonista suum editurus fuißet, ni stimulos æmula virtus addidisset. Huic tu has etiam vindicias, non inuidie, non maleuolentiæ ascribe benigne Lector, & Vale.

FINIS.

CVRVI

CVRVI AC RECTI Proportio promota.

LIBER TERTIVS.

THEOREMA I. PROPOS. I.

SI fuerit vt prima recta ad ſecundam, ita tertia ad quartam, & aſſumantur quinta & ſexta : erit vt rectangulum ſub prima & quinta, ad rectangulum ſub ſecunda & ſexta, ita rectangulum ſub tertia & quinta, ad rectangulum ſub quarta & ſexta.



Sit vt A. recta ad rectam B. ita recta C. ad rectam D. & aſſumantur duæ quęlibet E. F. Dico rectangulum ſub E. A. ad rectangulum ſub F. B. eſſe vt rectangulum ſub E. C. ad rectangulum ſub F. D. Cum enim ſit vt E. ad F. ita E. ad F. & vt A. ad B. ita C. ad D. erit ratio compoſita ex E. ad F. & A. ad B. eadem ratio-

ni

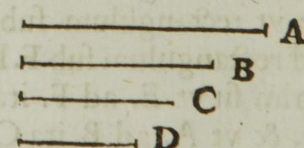
ni compositæ ex E. ad F. & C. ad D. sed ratio compo-
23.6.
sita ex ratione E. ad F. & A. ad B. est ratio rectanguli sub E. A. ad rectangulum sub F. B. & ratio composita ex ratione E. ad F. & C. ad D. eadem est quæ rectanguli sub E. C. ad rectangulum sub F. D. Igitur vt rectangulum sub E. A. ad rectangulum sub F. B. ita rectangulum sub E. C. ad rectangulum sub E. D.

Aliter. Cum rectangula sub EA. & sub EC. habeant
1. 6.
eandem altitudinem E. erunt vt A. ad C. Rursus cum rectangula sub F. B. & F. D. habeant eandem altitudinem F. erunt vt B. ad D. Quare cum sit vt A. ad C. ita rectangulum sub E. A. ad rectangulum sub E. C. vt autem A. ad C. ita permutando B. ad D. & vt B. ad D. ita rectangulum sub F. B. ad rectangulum sub F. D. erit vt rectan-
Schol.11.5.
gulum sub E. A. ad rectangulum sub E. C. ita rectangulum sub F. B. ad rectangulum sub F. D. Quod erat probandum.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

SI fuerint quatuor rectæ proportionales: erit vt quadratum primæ ad quadratum secundæ, ita rectangulum sub prima & tertia, ad rectangulum sub secunda & quarta.

Sint quatuor rectæ A. B. C. D. proportionales. Dico esse vt quadratum A. ad quadratum B. ita rectangulum sub A. C. ad rectangulum sub B. D. Nam cum sit vt A. ad B. ita C. ad D. erit permutando vt A. ad C. ita B. ad D. ideoq; rectangula sub A. C. rectangulis sub B. D. si-
1.defin.6.
milia sunt: similia autem sunt & quadrata A. B. Igitur super duabus primis A. B. constituta sunt

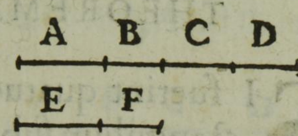


duo

duo rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta, videlicet quadrata A. B. & ſuper duabus C. & D. itidem duo rectangula C. A. & D. B. ſimilia: vt igitur quadratum A. ad quadratum B. ita rectangulum ſub A. C. ad rectangulum ſub B. D.

22.6.

Aliter. Cum ſit vt A. ad B. ita C. ad D. aſſumantur E. quinta, & F. ſexta; quarum E. ſit æqualis primæ A. & F. ſecundæ B. erit ex præcedenti propoſitione, vt rectangulum E. A. id eſt quadratum A. ad rectangulum F. B. id eſt quadratum B. ita rectangulum ſub E. C. id eſt, ſub A. C. ad rectangulum ſub F. D. id eſt ſub B. D. Quod erat demonſtrandum.

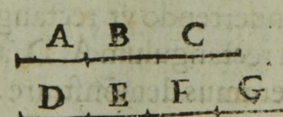


1.3.huius.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

SI fuerint tres quantitates quæcumq; priores, & quatuor rectæ lineæ poſteriores, fueritque vt prima priorum ad ſecundam ita prima poſteriorum ad ſecundam; & vt ſecunda priorum ad tertiam, ita tertia poſteriorum ad quartam: erit vt prima priorum ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & tertia poſteriorum, ad rectangulum ſub earumdem ſecunda & quarta.

SIT in prioribus quantitatibus quibuſcumque vt A. ad B. ita in poſterioribus rectis lineis D. ad E. & vt B. ad C. in prioribus quantitatibus, ita F. ad G. in poſterioribus rectis. Dico eſſe vt A. ad C. ita rectangulum ſub D. F. ad rectangulum ſub E. G. Quoniam eſt vt A. ad B. ita D. ad E. & vt B. ad C. ita F. ad G. erit ratio compoſita ex rationibus A. ad B. & B. ad C. eadem quæ compoſitæ ex ra-



tionibus D. ad E. & F. ad G. ſed ratio compoſita ex rationibus A. ad B. & B. ad C. eſt ratio A. ad C. & ratio compoſita ex rationibus D. ad E. & F. ad G. eſt eadem quæ rectanguli ſub D. F. ad rectangulum ſub E. G. Igitur vt A. ad C. ita rectangulum ſub D. F. ad rectangulum ſub E. G. Quod demonſtrare volebamus.

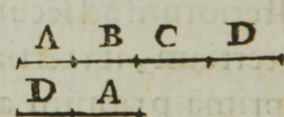
23.6.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI fuerint quatuor rectæ proportionales: rectangulum ſub prima & quarta erit medium proportionale inter rectangula ſub prima & ſecunda, & ſub tertia & quarta.

SINT Quatuor rectæ proportionales A. B. C. D. nempe vt A. ad B. ita C. ad D. Dico rectangulum ſub A. D. eſſe medio loco proportionale inter rectangulum ſub A. B. & rectangulum ſub C. D. Aſſumantur duæ infra quatuor datas quarum D. ſit æqualis quartæ D. & A. æqualis primæ A. erit, ex prima tertij huius, vt rectangulũ ſub D. A. id eſt, ſub quarta & prima ad rectangulum ſub A. B. prima & ſecunda, ita rectangulum ſub D. C. quarta & tertia ad rectangulum ſub A. D. prima & quarta. Quare cum ſit vt rectangulum A. D. ad rectangulum AB. ita rectangulum D. C. ad rectangulum A. D. erit conuertendo vt rectangulum A. B. ad rectangulum A. D. ita rectangulum A. D. ad rectangulum D. C. Quod propoſueramus demonſtrare.

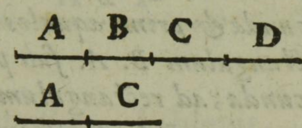
1.3. huius.



THEOREMA V. PROPOS. V.

SI fuerint quatuor rectæ proportionales: erit vt quadratum primæ, ad rectangulum ſub ſecunda & tertia, ita rectangulum ſub prima & tertia, ad rectangulum ſub quarta & tertia.

SINT quatuor rectæ proportionales: vt A. ad B. ita C. ad D. Dico eſſe vt quadratum A. ad rectangulum B. C. ita rectangulum A. C. ad rectangulum C. D. Aſſumantur duæ infra quatuor datas quarum A. ſit æqualis primæ A. & C. æqualis tertiæ. C. erit ex prima tertij huius rectangulum ſub AA. id eſt quadratum A. primæ ad rectangulum C. B. ſub ſecunda & tertia; ita rectangulum A. C. ſub prima & tertia, ad rectangulum C. D. ſub tertia & quarta. Quod eſt propoſitum.

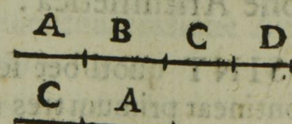


1.3. huius.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI fuerint quatuor rectæ proporrionales: erit vt rectangulum ſub prima & tertia, ad rectangulum ſub prima & ſecunda, ita quadratum tertiæ ad rectangulum ſub prima & quarta.

SIT vt A. prima ad B. ſecundam ita C. tertia, ad D. quartam. Dico eſſe vt rectangulum A. C. ad rectangulum A. B. ita quadratum. C. ad rectangulũ A. D. Aſſumantur C. A. æquales tertiæ & primæ. Erit ex 1. 3. huius rectangulum A. C. ſub prima & tertia, ad rectangulum A. B. ſub prima & ſecunda, vt rectangulum C. C. id eſt quadratum. C. tertiæ, ad rectangulum A. D. ſub prima & quara.

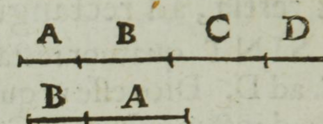


1.3. huius.

SCHOLIVM.

Ex eodem principio poſſent demonſtrari propoſitiones 16. & 17. lib. 6. elementorum, nempe ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei quod ſub medijs comprehenditur rectangulo. Sit enim vt A. ad B. ita C. ad D. & aſſumantur B. A. ſecundæ & primæ æquales: Erit vt rectangulum B. A. ſub prima & ſecunda; ad rectangulum A. B. ſub ſecunda ex prima ita rectangulum B. C. ſub ſecunda & tertia, ad rectangulum A. D. ſub prima & quarta: æqnalia autem ſunt rectangula BA. & AB. Igitur etiam æqnalia ſunt rectangula B. C. & A. D.

1.3. huius.



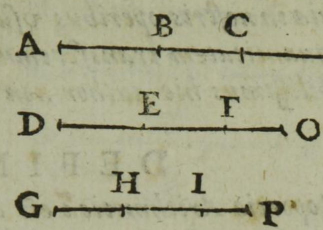
Quod ſi intermediæ B. C. æquales ponantur, eodem modo oſtendemus rectangulum A. D. rectangulo B. C. id eſt quadrato B. vel C. eſſe æquale.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI ſint quotlibet magnitudinum ſeries quotlibet magnitudines continentes ſingulæ in qualibet proportione Arithmetica continua; erunt & compoſitæ primæ cum primis, ſecundæ cum ſecundis, & ſic deinceps, in continua proportione Arithmetica.

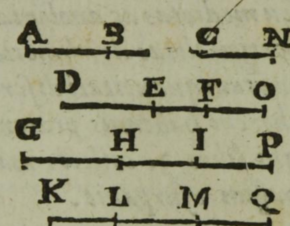
SINT quotlibet ſeries magnitudinum quarum prima contineat primum tres magnitudines AB. DE. GH. ſecunda magnitudines BC. EF. HI. tertia magnitudines CN. FO. IP. habeantque AB. DE. GH. rationem Arithmeticam, vt & aliæ ſeries. Dico quod etiam compoſitæ primæ AB. BC. CN. & ſecundæ DE. EI. IB. & tertię GH. HI. IP. habent ratio-

rationem Arithmeticam. Quoniam tres magnitudines AB. DE. GH. ſunt in proportionalitate Arithmetica, erunt AB. GH. duplo ipſius DE. æquales (vt oſtendemus in ſequenti Scholio) item BC. HI. ſimul duplæ erunt ipſius EI. & CN. IP. ipſius FO. Igitur omnes ſimul AB. GH. BC. HI. CN. IP. id eſt tota AN. & tota GP. erunt ſimul duplæ omnium DE. EF. FO. id eſt toti DO. Igitur in ratione Arithmetica ſunt AN. DO. GP. vt ſequenti Scholio probabimus.



1. 5.

Sed contineat quælibet ſeries magnitudines plures tribus vt prima contineat magnitudines AB. DE. GH. KL. ſecunda magnitudines BC. EF. HI. LM. tertia magnitudines CN. FO. IP. MQ. Habeantque AB. DE. GH. KL. rationem Arithmeticam continuam, vt & aliæ ſeries, ſingulæ eandem, aut peculiarem. Probabimus ex prima parte huius propoſitionis, tres AN. DO. GP. eſſe in proportionalitate Arithmetica. Rurſus ex eadem oſtendemus, tres magnitudines DO. GP. KQ. eſſe in ratione Arithmetica. Igitur ex definitione, ipſarum AN. DO. & DO. GP. eadem eſt differentia. Item ipſarum DO. GP. & GP. KQ. eadem eſt differentia: Quare æquales ſunt differentiæ magnitudinum AN. DO. GP. KQ. Sunt igitur in continua ratione Arithmetica. Quod erat demonſtrandum.



1. pronunc.

SCHOLIVM.

Quod vero duæ magnitudines AB. GH. ſint duplæ ipſius DE. & reliqua quæ in propoſitione ſupponuntur vera ſint,

sint, demonstrauit præ cæteris luculentissime Claudius Gaspar Bachetus, vir non in mathematicis solum, sed in omni genere literaturæ vel antiquis conferendus in absolutissimis commentarijs quæ in Diophantum edidit, cuius aliquot propositiones quia in nostris operibus vsuuenient, a numeris ad quamlibet quantitatem transferemus, vt ijs consulamus quibus forte nobilissimus hic author non innotuit.

DEFINITIO.

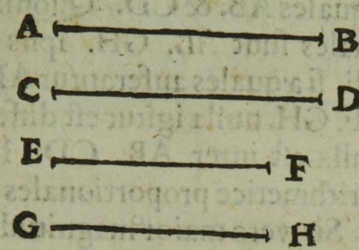
PRoportio Arithmetica est cum in tribus aut quatuor seu numeris seu magnitudinibus eiusdem generis, eadem (aut nulla) est differentia primæ, & secundæ, quæ secundæ & tertiæ; aut quæ tertiæ & quartæ: ita tamen vt si prima cum secunda comparetur ac secunda cum tertia, aut tertia cum quarta singulæ singulis vel æquales vel maiores vel minores existant. Eadem vero proportio si in tribus terminis cōsistat μεσότης *seu medietas ac anologia; si in quatuor analogia tantum ac proportionalitas Arithmetica dicitur. Quod vero id nominis non tantum quantitati discretæ, sed etiam continuæ tribui possit, authorem habemus præter alios luculentum Pappum Alexandrinū qui libro 3. collect. mathem. illud in quantitate continua passim vsurpauit.*

I.

SI fuerit eodem differentia primæ magnitudinis ad secundam quæ tertiæ ad quartam, seu; si fuerint quatuor magnitudines Arithmeticè proportionales; summa ex extremis conflata erit mediarum summæ æqualis: & si extrema simul sumpta fuerint æqualia medijs simul sumptis, erunt dictæ magnitudines Arithmetice proportionales.

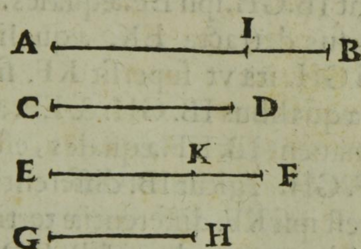
SINT

SINT quatuor magnitudines AB.CD.EF.GH. sitque eadem differentia AB. & CD. quæ EF. & GH. (quod est esse Arithmeticè proportionales) Dico duas AB. GH. simul duabus CD. EF. esse æquales.



Sit primum AB. ipsi CD. æqualis, cum nulla sit differentia inter AB.& CD.etiam nulla erit inter EF. GH. ex superiori definitione, æquales igitur sunt EF. GH. Si igitur æqualibus AB. CD.addantur æquales EF.GH. nempe GH. ipsi AB. & EF. ipsi CD. erunt AB.GH. simul æquales ipsis CD. EF. simul. Quod primo probandum erat.

Sit secundo maior AB. quam CD.quorum differentia sit IB. & duarum EF.GH.differentia sit KF.manifestum est AI. CD. esse æquales cum ab ijs pars IB.qua differunt sublata sit: Item EK. GH.ob eandem rationem sunt æquales: æquales autem etiam sunt IB. KF. ex hypothesi. Igitur ex prima parte huius erunt duæ AI. GH. duobus CD. EH. æquales, quibus si addantur æquales IB. KF. erit tota AB. cum GH. æqualis toti EF. cum CD. Quod secundo loco erat ostendendum.



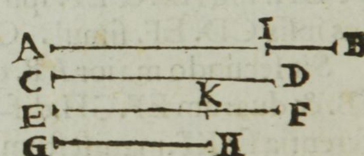
Tandem inuertatur ordo magnitudinum; ita vt prima sit GH. secunda EF. tertia CD. vltima AD. eodem prorsus demonstrandi modo ostendemus duas GH. AB. duabus EF. CD. esse æquales.

Sed sint duæ magnitudines AB. GH. ipsis CD. EF. æquales. Dico, differentiam AB. & CD. esse eandem differentiæ

ferentiæ EF. & GH. ſeu quatuor AB. CD. EF. GH. eſſe Arithmetice proportionales. Sint rurſus primo æquales AB. & CD. Quoniam æquales ſunt AB. GH. ipſis CD. EF. ſi æquales auferantur AB. & CD. remanebunt æquales EF. GH. nulla igitur eſt differentia inter EF. GH. ſed & nulla eſt inter AB. CD. Igitur ex ſuperiori definitione Arithmetice proportionales ſunt AB. CD. & EF. GH.



Sit vero maior magnitudo AB. magnitudine CD. exceſſu IB. & ſint æquales AB. GH. ſimul ipſis CD. EF. ſimul: erunt igitur AI. CD. ſublata differentia IB. æquales. Quare, ſi ex aggregatis AB. GH. & CD. EF. quæ ſupponuntur æqualia, auferantur æquales, illinc AI. hinc CD. remanebunt IB. GH. ipſi EF. æquales. Rurſus detracta EK. æquali ipſi GH. ita vt ſuperſit KF. ſi ex æqualibus IB. GH. & EF. auferantur æquales EK. GH. remanent IB. KF. æquales, eſt autem KF. differentia ipſarũ EF. GH. Igitur IB. differentia primæ, & ſecundæ, æqualis eſt ipſi KF. differentiæ tertiæ & quartæ, ſunt ergo, ex definitione præcedenti AB. CD. EF. GH. Arithmetice proportionales.

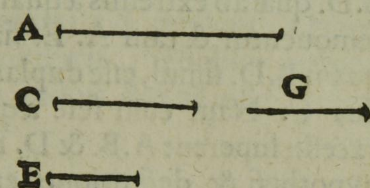


Sed ſit minor prima magnitudo GH. quam ſecunda EF. exceſſu KF. & ſint æquales GH. AB. ipſis EF. CD. erunt igitur GH. EK. æquales. Quare ſi ex aggregatis æqualibus GH. AB. & EF. CD. auferantur æquales illinc GH. hinc EK. remanebunt KF. & CD. ipſi AB. æquales. Iterum ſumpta AI. æquali ipſi CD. erit IB. differentia ipſarum CD. AB. Quare ſi ab æqualibus KF. CD. & AB. auferantur æquales, illinc CD. hinc AI. remanebunt, vt prius, differentiæ KF. IB. æquales, ideoque erunt prædictæ quatuor magnitudines Arithmetice proportionales. Quod erat vltimo loco demonſtrandum.

II.

SI fuerint tres magnitudines in medietate Arithmetica: erit prima cum tertia dupla secundæ. Et si prima cum tertia fuerit dupla secundæ, erunt tres magnitudines in medietate Arithmetica.

SINT tres magnitudines A. C. E. in medietate Arithmetica. Dico duas A. E. ipsius C. esse duplas. Accipiatur G. æqualis ipsi. C. Erit ipsarum A. C. & C. E. eadem differentia, sed ipsarum CE. & G.E. etiam eadem est differentia; ergo ipsarum A. C. & ipsarum G. E. est eadem differentia. Igitur per præcedentem duæ A. E. simul duabus C. G. simul sunt æquales: sed C. G. simul sunt duplæ ipsius C. cum inuicem sint æquales C. & G. ergo A. E. ipsius C. sunt duplæ. Quod efficere primo loco volebamus.



ex definit. superiori.

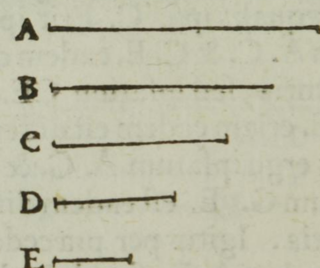
Sed sint A. E. duplæ ipsius. C. Dico tres magnitudines A. C. E. esse in medietate Arithmetica. Sumpta enim rursus G. æquali ipsi. C. Cum A. E. sint duplæ ipsius. C. erunt duabus C. G. æquales. Igitur per præcedentem, erunt quatuor A. C. G. E. id est A. C.C. E. in proportione Arithmetica, ideoque A. C. E. in medietate Arithmetica. Quod secundo loco probandum fuerat.

Priorem patrem huius propositionis aliter demonstrat Clauius Schol. in 17. 6. propositione 1.

I I I.

SI ſint quodlibet magnitudines in proportione Arithmetica continua, extremæ ſimul ſumptæ æquales ſunt duabus ab extremis æqualiter remotis, & duplo mediæ in multitudine magnitudinum impari.

Sint quotlibet magnitudines A.B. C. D. E. multitudine impares æqualiter differentes, ſeu in proportionalitate Arithmetica continua. Dico extremas A.E. eſſe æquales ipſis B.D. quæ ab extremis æqualiter remouentur & tam A. E. ſimul quam B.D. ſimul, eſſe duplas ipſius C. Nam cum ſeſe æquali exceſſu ſuperent A.B. & D. E. ex hypotheſi & definitione, erunt A. E. ipſis B.D. æquales, per primam huius Scholij: & quia B.C. D. ſunt Arithmeticè proportionales, etiam ex hypotheſi, erunt B. D. ipſius C. duplæ, per ſecundam huius Scholij. Sed duabus B. D. æquales ſunt duæ A. E. Duplæ igitur ſunt duæ A. E. mediæ. C. Quæ omnia erant demonſtranda.



I V.

SI quatuor magnitudines fuerint Arithmetice proportionales, etiam conuertendo erunt Arithmetice proportionales.

SI enim quatuor magnitudines fuerint Arithmetice proportionales, aut ſuperabunt prima ſecundam & tertia quartam eodem exceſſu, aut ab ijs deficient, aut prima, & ſecunda, item ſecunda & tertia erunt æquales. Si prima ſuperet ſe-

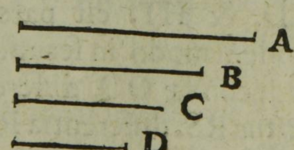
ſecundam eodem exceſſu quo tertia quartam, ſecunda eodem defectu deficiet a prima quo quarta a tertia, eadem enim eſt differentia qua minor a maiori deficit, & qua maior minorem ſuperat. Igitur ex definitione huius Scholij, ſecunda ad primam, & quarta ad tertiam eandem habent rationẽ Arithmeticam. Si prima eodem defectu deficiat a ſecunda quo tertia a quarta, ſecunda eodem exceſſu ſuperat primam, quo quarta tertiam. Atque ita rurſus habebunt ſecunda ad primã; & quarta ad tertiã proportionem Arithmeticam. Denique ſi prima & ſecunda, item tertia & quarta ſint æquales, conſtat nullam eſſe differentiam inter ſecundã & primam, item nullam inter quartam & tertiam: Quare ſecunda ad primam, & quarta ad tertiam habebunt proportionalitatem Arithmeticam, ex eadem definitione. Quod erat demonſtrandum.

V.

SI quatuor magnitudines fuerint Arithmeticè proportionales, & viciſſim erunt proportionales.

Hæc propoſitio demonſtratur a Federico Commandino, & Chriſtophoro Clauio Lemm. in 80. propoſit. lib. 10. elementorum: ſed breuius hoc modo.

SINT quatuor magnitudines A. B. C. D. Arithmeticè proportionales. Dico quod permutando A. ad. C. & B. ad D. habent rationem Arithmeticam. Nã quoniam A. B. C. D. ſunt in ratione Arithmetica, erunt per primam



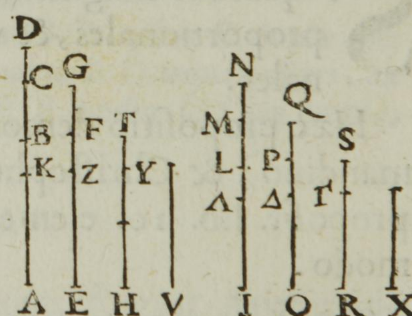
partem primæ huius Scholij, extremæ A. D. medijs B. C. æquales. Rurſus ſtatuantur eędem magnitudines ordine per-

mutato A. C. B. D. erunt eędem extremæ A. D. ijsdem medijs C.B. æquales. Igitur per secundam partem primæ propositionis huius Scholij erunt A. C. B. D. in ratione Arithmetica. Quod erat probandum.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI sint quotcumque magnitudines & aliæ ipsis ęquales numero quæ binę in eadem ratione Arithmetica sumantur, & ex æqualitate in eadem ratione Arithmetica existent.

SINT primum tres magnitudines AD.EG.HT.& aliæ tres IN. OQ. RS. sintque AD. EG. & IN. OQ. in ratione Arithmetica. Item EG. HT. & OQ. RS. sint in ratione Arithmetica. Dico quoque ex æqualitate AD. HT. & IN. RS. esse in ratione Arithmetica. Sit primæ AD. & secundæ EG. differentia DC. Item secundæ EG. & tertiæ HT. differentia GF. cui accipiatur æqualis CB. erunt HT. & EF. æquales; item EG. & AC. æquales erunt, ex quibus si demantur æquales GF. CB. remanebunt BA. EF. id est HT. æquales. Differentia igitur ipsarum AD. & HT. est pars BD.



Eodem modo in secundis magnitudinibus si sit primæ IN. & secundæ OQ. differentia MN. item secundæ OQ. & tertiæ RS. differentia PQ. cui æqualis sumatur ML. erit tota NL. differentia primæ IN. & tertiæ RS. Cum igitur AD. EG.& IN.OQ. sint in proportionalitate Arithmetica, erunt ex definitione differentiæ CD. MN. æquales. Item quia

EG.

EG. HT. & OQ. RS. sunt in ratione Arithmetica erunt differentiæ FG. PQ. æquales: ipsi autem FG. est æqualis CB. & ipsi PQ. æqualis LM. Si igitur æqualibus DC. MN. æquales addantur CB. ML. erunt totæ DB. NL. æquales; est autem ostensa DB. differentia primæ AD. & tertiæ HT. & NL. differentia primæ IN. & tertiæ RS. in secundis magnitudibus. Igitur AD. HT. & IN. RS. habentes æquales differentias DB. NL. ex definitione sunt in ratione Arithmetica.

Sed sint plures magnitudines tribus, ita vt sint etiam HT. & V. & RS. X. in proportione Arithmetica. Dico adhuc AD. V. & IN. X. esse in ratione Arithmetica. Ipsarum enim HT. V. differentia sit YT. cui æquales sumantur FZ. BK. & ipsarum RS. X. differentia sit r S. cui æquales sumantur P △. L Λ. Eodem modo quo in prima parte huius propositionis probabimus DK. & N Λ. esse differentias ipsarum AD. V. & IN. X. easdemque esse inter se æquales. Igitur AD. V. & IN. X. erunt in ratione Arithmetica. Quod demonstratum esse volebamus.

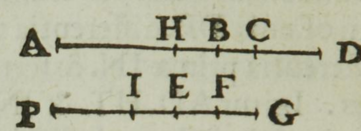
THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI sint quotcumque magnitudines in ratione Arithmetica, & totidem aliæ sumantur quæ eandem cum illis proportionem Geometricam habeant, singulæ singulis: habebunt etiam posteriores rationem Arithmeticam.

SINT tres magnitudines DA. CA. BA. in ratione Arithmetica & vt DA. ad CA. ita GP. ad FP. & vt CA. ad BA. ita FP. ad EP. Dico etiam GP. FP. EP. esse Arithmetice proportionales. Cum enim sit ex hypothesi vt DA. ad AC. ita GP. ad PF. erit diuidendo vt DC. ad CA. ita GF. ad FP. Rursus cum sit vt CA. ad AB. ex hypothesi ita FP. ad PE. erit per conuersionem rationis vt CA. ad CB. ita FP. ad FE.

Quare

Quare ex æqualitate, erit vt DC. ad CB. ita GF. ad FE. Sed CD. CB. ſunt differentiæ triũ quantitatum AD. AC. AB. videlicet CD. ipſarum AD. AC. & BC. ipſarum AC. AB. habentium rationem Arithmeticam ex hypotheſi: æquales igitur ſunt DC. CB. ex definitione, æquales igitur etiam GF. FE. eandem cum illis rationem habentes: Sed etiam FG. FE. ſunt differentiæ trium magnitudinum PG. PF. PE. nimirum FG. ipſarum PG. PF. & EF. ipſarum PF. PE. Igitur etiam tres magnitudines PG. PF. PE. ſunt in ratione Arithmetica.



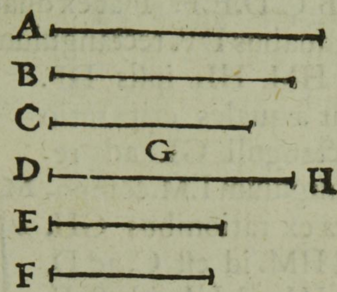
Sint vero plures magnitudines tribus AD. AC. AB. AH. in ratione Arithmetica & ſit prætereà vt BA. ad HA. ita EP. ad IP. Dico etiam GP. FP. EP. IP. habere rationem Arithmeticam. Nam cum ſint tres magnitudines CA. BA. HA. in ratione Arithmetica [c] quibus Geometrice proportionales ſunt tres FP. EP. IP. conſtat ex prima parte huius propoſitionis differentias HB. BC. tum inter ſe tum differentijs IE. EF. eſſe æquales, æquales autem ſunt BC. CD. & EF. FG. ex prima parte hurus. Quare tres differentiæ IE. EF. FG. æquales ſunt, ideoque quatuor quantitates GP. FP. EP. IP. rationem Arithmeticam habent. Quod erat, &c.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI primæ quantitatis ad ſecundam ratio componatur ex ratione tertię ad quartam; & quintę ad ſextam: erit vt prima ad ſecundam, ita tertia ad aliam ad quam quarta eandem rationem habeat quam quinta ad ſextam.

THEO-

Sit ratio A. primæ ad B.ſecundam compoſita ex rationibus C. tertiæ ad DH. quartam, & E. quintæ ad F. ſextam. Fiat vt E. ad F. ita DH. ad aliã quampiam DG. Dico eſſe vt A. ad B. ita C. ad DG. Ratio enim A. ad B. compoſita eſt ex ratione C.ad DH.& E.ad F.ſed vt E.ad F. ita C. ad DG. ex hypoteſi, ergo ratio A.ad B. componitur ex ratione C.ad DH.& DH.ad DG. Ergo, vt A.ad B. ita C.ad DG. Quod demonſtra- oportuit.



COROLLARIVM.

Conſtat etiam, poſitis quæ in propoſitionr, eſſe vt primam ad ſecundam ita quintam ad aliam ad quam ſit ſexta vt tertia ad quartam. Nam quoniam ratio A. ad B. compoſita eſt ex rationibus C. ad DH. & E. ad F. erit ſine diſcrimine compoſita ex rationibus E. ad F. & C. ad DH. eritque E. tertia quantitas, & F. quarta C. quinta DH. ſexta habetque DH. ſexta ad DG. eandem rationem quam E. tertia ad F. quartam. Eſt autem oſtenſum eſſe vt A. ad B. ita C. ad DG. Igitur vt prima A. ad ſecundam B. ita quinta C. ad DG. ad quam DH. ſexta ita ſe habet vt E. tertia ad quartam F.

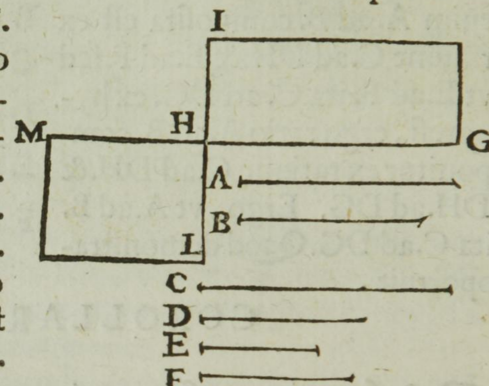
THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI primæ quantitatis ad ſecundam ratio componatur ex ratione tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam: eiuſdem primæ ad ſecundam ratio componetur ex ratione tertię ad ſextam, & quintæ ad quartam.

Sit ratio primæ quantitatis A. ad secundam B. composita ex ratione tertiæ C. ad quartam D. & quintæ E. ad sextam F. sintque ordine vt sex datæ magnitudines inter se, ita lineę A.B.C.D.E.F. Fiat ex duabus C.E. rectangulum GHI. & ex duabus DF. rectangulum LHM. ita vt GH. HI. ipsis C.E. & HM. HL. ipsis DF. sint æquales erit ratio rectanguli GI. ad rectangulum LM. composita ex rationibus GH. ad HM. id est C. ad D. & IH. ad HL. id est E. ad F. Sed etiam ratio A. ad B. composita est ex iisdem rationibus C. ad D. & E. ad F. eadem igitur est ratio A. ad B. rationi rectanguli GI. ad rectangulum LM. at vero ratio rectanguli GI. ad rectangulum LM. etiam componitur ex ratione GH. ad HL. id est. C. ad F. & IH. ad HM. id est E. ad D. Igitur etiam ratio A. ad B. componitur ex rationibus C. ad F. & E. ad D. Vt autem lineæ A.B.C.D.E.F. ita ponuntur magnitudines A.B.C.D.E.F. Igitur magnitudinum A. B. ratio componitur ex rationibus magnitudinum C. F. & D.E. Quod intendebamus probare.

23. 6.

23. 6.



THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI primæ quantitatis ad secundam ratio componatur ex ratione tertiæ ad quartam, & quintæ ad sextam: etiam conuertendo ratio secundæ ad primam componetur ex ratione sextæ ad quintam, & quartæ ad tertiam.

Sint

Sint omnia quæ ſuperiori propoſitione. Dico rationem B.ad A.componi ex rationibus F.ad E.& D.ad C.Erit enim conuertendo vt rectangulum LM. ad rectangulũ GI. ita B. ad A. eſt autem ratio rectanguli LM. ad rectangulum GI. compoſita ex rationibus MH. ad HG. id eſt D. ad C. & LH. compoſita ex rationibus MH. ad HG. id eſt D. ad C. & LH.ad HI.id eſt F. ad E. Igitur B. ad A. ratio compoſita eſt ex rationibus D.ad C.& F. ad E- Quod erat demonſtrandum.

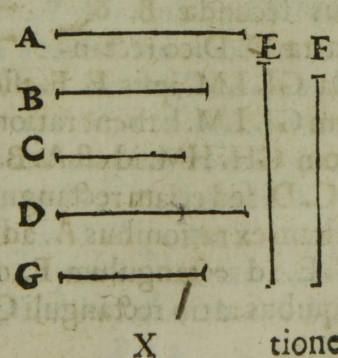


23. 6.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI primæ quantitatis ad ſecundam ratio componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam: etiam ratio tertiæ ad quartam componetur ex rationibus primæ ad ſecundam, & ſextæ ad quintam.

HABEAT A. prima ad B. ſecundam rationem compoſitam ex rationibus. C. tertiæ ad D. quartam, & E. quintæ ad F. ſextam. Dico rationem C. ad D. componi ex rationibus A. ad B. & F. ad E. Fiat enim vt E. ad F. ita D. ad G. Cum proportio A. ad B. ſit compoſita ex ratione C.ad D. & E. ad F. id eſt D. ad G. proportio autem compoſita ex ra-



tione

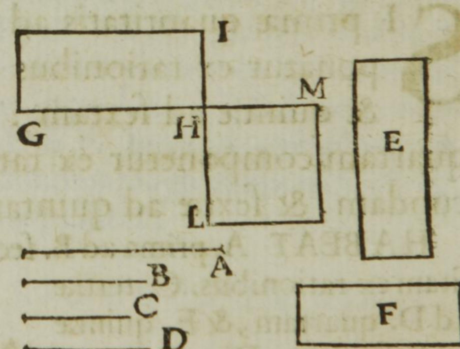
tione C. ad D. & D. ad G. eadem est quæ C. ad G. (Nam totum suis partibus simul sumptis æquale est) erit vt A. ad B. ita C. ad G. Rursus cum assumpta sit inter C. D. tertia G. erit ratio C. ad D. composita ex rationibus C. ad G. & G. ad D. sed vt C. ad G. ita A. ad B. & vt G. ad D. ita F. ad E. (cum enim posita sit D. ad G. vt E. ad F. erit conuertendo vt G. ad D. ita F. ad E.) erit ratio C. ad D. composita ex rationibus A. ad B. & F. ad E. Quod demonstrare oportuit.

Schol. in defin. 5. 6.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duorum rectangulorum ratio componatur ex rationibus primæ rectæ ad secundam, & tertiæ ad quartam, rectangula sub prima & tertia, & sub secunda & quarta, erunt datis rectangulis proportionalia.

DVORVM rectangulorum E. F. ratio componatur ex rationibus A. primæ ad secundam B. & C. tertiæ ad quartam D. fiatque rectangulum GI. sub rectis GH. HI. æqualibus primæ A. & tertiæ C. & rectangulum LM. sub rectis HM. HL. æqualibus secundæ B. & quartæ D. Dico rectangula GI. LM. ipsis E. F. esse proportionalia. Rectangula enim GI. LM. habent rationem compositam, ex ratione laterum GH. HM. id est A. B. & ratione laterum IH. HL. id est C. D. sed etiam rectangula E. F. habent rationem compositam ex rationibus A. ad B. & C. ad D. igitur ratio rectanguli E. ad rectangulum F. composita ex ijsdem rationibus ex quibus ratio rectanguli GI. ad rectangulum LM. eadem est



23. 6.

est

eſt quæ rectanguli GI. ad rectangulum LM. Quod probandum ſuſceperamus.

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI duorum rectangulorum ratio componatur ex rationibus primæ rectæ ad quartam, & tertiæ ad ſecundam: rectangula ſub prima & tertia, & ſub ſecunda & quarta ernnt datis rectaugulis proportionalia.

DVORVM rectangulorum E. F. ratio componatur ex rationibus A. primæ ad D. quartam, & C. tertiæ ad B. ſecundam, fiatque rectangulum GHI. ſub rectis GH. HI. quæ primæ A. & tertiæ C. ſint æquales, & rectangulum LHM. ſub rectis LH. HM. quæ B. ſecundæ & D. quartæ ſint æquales. Dico rectangula GI. LM. rectangulis E. F. eſſe proportionalia. Rectangula enim GI. LM. habent rationem compoſitam ex ratione GH. ad HL. id eſt A. ad D. & ex ratione IH. ad HM. id eſt C. ad B. ſed etiam rectangula E. F. ponuntur habere rationem compoſitam ex rationibus A. ad D. & C. ad B. Eadem igitur eſt ratio rectangulorum GI. LM. & rectangulorum E. F. Quod à nobis probandum fuerat.

23. 6.

SCHOLIVM.

PTolemæus lib. 1. magnæ constructionis capite, apud Theonē, & Trapezuntium 12. apud Rainholdum vndecimo, regulam, quam vocant ſex quantitatum, ingenioſe admodum, vt reliqua omnia, excogitauit; quæ non ſolum in demonſtrationibus ſphæricis, ſed etiam Geometricis magnum momentum obtinere poteſt; vt ex ſequentibus patebit. Cum tamen harum quantitatum plures connexiones ſiue coniugationes eſſe poſſint, ipſe vltra duas progreſſus non eſt, quarum alteram vocat κατὰ σύνθεσιν, *ſeu ſecundum compoſitionem, alteram* κατὰ διαίρεσιν

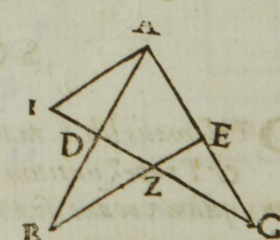
id est, secundum diuisionem. Primæ πρότασις *huiusmodi est apud Theonem, ex versione Io. Baptistæ Portæ, vt quidem reor non admodum bonam;*

Si in duas rectas finitas angulum continentes, ab extremis producantur duæ rectæ secantes se inuicem, & quæ angulum continent, ratio vnius rectarum, quæ à principio angulum continent, ad ipsam quæ intercipitur ad angulum a producta, coniuncta est, siue componitur, & ex ratione productæ ab extremo dictæ rectæ, & interceptæ ipsius excessus alterius productæ, ad alteram rectam continentium angulum, & præterea ratione interceptæ, & a sectione productarum ad terminum alterius angulum continentium, & ipsius productæ.

Sed breuius, & clarius Regiomontanus Epitomatis lib. 1. propositione nona.

Si a terminis duarum linearum ab angulo aliquo descendentium, duæ lineæ sese secantes, super descendentes mutuo reflexæ fuerint: erit lineæ descendentis ad partem suam superiorem proportio, ex duabus proportionibus, quarum vna est a termino huius descendeutis reflexæ, ad partem eius supra sectionem, alia est partis infra sectionem alterius reflexæ, ad totam eandem reflexam composita.

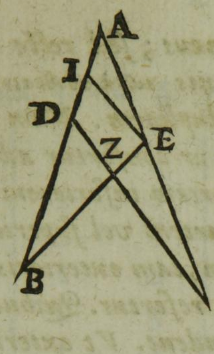
Εκθεσιν *ac* διόρισμον *habent Ptolemæus, & Theon quæ intelligi non possunt sine oculari inspectione diagrammatis, magis ad amussim Regiomonianus. Ab angulo A. descendāt duæ lineæ AB. AG. à terminis earum B. G. quæ reflectantur mutuo super descendentes, quæ sint BE. GD. secantes se in Z. Dico quod proportio GA. ad AE. composita est ex duabus scilicet proportione GD. ad DZ. & proportione ZB. ad BE.*

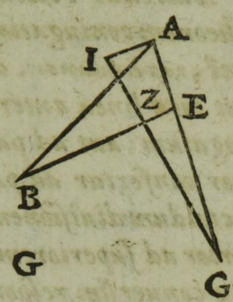


Κατασκευὴ *&* απόδειξις *est Ptolomæi, ex versione Rainholdi. Ducatur per punctum E. linea EI. æquidistans lineæ GD. Quoniam igitur lineæ GD. EI. sunt æquidistantes, ratio lineæ GA. ad AE. eadem est quæ lineæ GD. ad lineam EI. Assumatur*

4. 6.

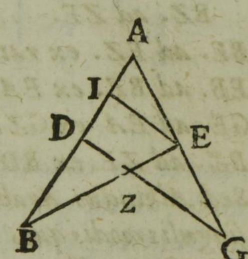
tur autem deforis linea ZD. Erit igitur composita ratio lineæ GD. ad lineam EI. ex ratione GD. ad lineam DZ. & ex ratione lineæ DZ. ad lineam EI. Quare & ratio lineæ GA. ad lineam AE. composita est ex ratione lineæ GD. ad lineam DZ. & ex ratione lineæ DZ. ad lineam EI. Est autem & ratio





lineæ DZ. ad EI. eadem rationi lineæ ZB. ad lineam BE. cum æquidistantes sint lineæ EI. & ZD. Ratio igitur lineæ GA. ad lineam AE. composita ex est ex ratione lineæ GD. ad lineam DZ. & ex ratione lineæ ZB. ad lineam BE. Quod erat demonstrandum. 4. 6.

Eodem modo demonstrabitur quod & secundum diuisionem ratio lineæ GE. ad lineam EA. composita est ex ratione lineæ GZ. ad ZD. & ex ratione lineæ DB. ad BA. Ducta per A. punctum linea AI. æquidistante lineæ EB. & protracta in eandem GDI. Rursus enim quoniam linea AI. æquidistans est lineæ EZ. est sicut GE. ad EA. Sic GZ. ad ZI. Assumpta autem deforis linea ZD. ratio lineæ GZ. ad ZI. componitur ex ratione lineæ GZ. ad lineam ZD. & ratione lineæ DZ. ad lineam ZI. Est autem ratio lineæ DZ. ad lineam ZI. eadem quæ est ratio DB. ad BA. eo quod in æquidistantes lineas AI. & ZB. ductæ sint lineæ BA. & ZI. Quare ratio lineæ GZ. ad lineam ZI. componitur ex ratione lineæ GZ. ad lineam ZD. & ex ratione lineæ DB. ad lineam BA. Porro ratio lineæ GE. ad EA. eadem est quæ lineæ GZ. ad lineam ZI. Ergo ratio lineæ GE. ad lineam EA. componitur ex ratione lineæ GZ. ad lineam ZD.



ZD. & ex ratione lineæ DB. ad lineam BA. Quod demonstrandum erat.

Hactenus Ptolemæus; sed recte admonet Rainholdus post Theonem coniugationis κατὰ σύνθεσιν *quadruplicem esse varietatẽ,* κατὰ διαίρεσιν, *duplicem. Nam secundum compositionem, aut tota lineæ exterior confertur ad partem superiorem versus angulum, aut ad partem inferiorem ab angulo; aut tota interior confertur ad partem vel superiorem, vel inferiorem. At secundum diuisionem, tam exterioris, quam interioris pars inferior ad superiorem refertur. Quibus omnibus singulæ* ἀνάπαλιν *seu conuersim respondent. Vt exterior GA. confertur aut cum AE. aut cum EG. & tota interior, GD. aut cum DZ. aut cum GZ. aut exterioris pars inferior GE. ad superiorem EA. aut interioris pars inferior GZ. ad superiorem ZD. & conuertendo. Singuli autem casus demonstrantur directi quidem a Theone, etiam conuersi a Rainholdo. Nempe*

1. *Ratio GA. ad AE. componitur ex ratione GD. ad DZ. & BZ. ad BE.*
2. *Ratio AG. ad GE. componitur ex ratione AD. ad DB. & BZ. ad ZE.*
3. *BE. ad EZ. ex ratione BA. ad AD. & DG. & ad GZ.*
4. *EB. ad BZ. ex EA. ad AG. & GD. ad PZ.*
5. *GE. ad EA. ex GZ. ad ZD. & DB. ad BA.*
6. *BZ. ad ZE. ex BD. ad DA. & AG. ad GE.*

Sed Alkindus Arabs, & ab eo Rainholdus, animaduertit, in singulis modis quos superius posuimus, 180. coniugationes directe fieri posse, totidem ἀνάπαλιν *ex quibus soli 36. sint vtiles ac necessarij, 12. impossibiles, reliqui inutiles, atque horum 36. modorum octodecim, esse reliquorum conuertentes, Modi autem necessarij in sex quibuslibet quantitatibus in quibus primæ ad secundam ratio componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad sextam. hac tabula continentur.*

Tabula 18. modorum necessariorum.

Primus	1. ad	2. ex	3. ad	4. &	5. ad	6.
II.	1	2	3	6	5	4
III.	1	3	2	4	5	6
IV.	1	3	2	6	5	4
V.	1	5	2	6	3	4
VI.	1	5	2	4	3	6
VII.	2	4	1	3	6	5
VIII.	2	4	1	5	6	3
IX.	2	6	1	5	4	3
X.	2	6	1	3	4	5
XI.	3	4	1	2	6	5
XII.	3	4	1	5	6	2
XIII.	3	6	1	2	4	5
XIV.	3	6	1	5	4	2
XV.	4	5	2	1	3	6
XVI.	4	5	2	6	3	1
XVII.	5	6	1	2	4	3
XVIII.	5	6	1	3	4	2

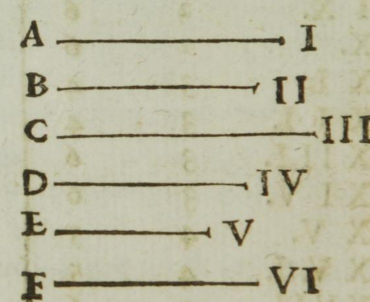
Horum autem modorum primum Ptolemeus in prima coniugatione ſex prædictarum quantitatum; ſeptimum, octauum, vndecimum, decimum ſeptimum Rainholdus; reliquos omnes nos aliquando totidem theorematis demonſtrauimus; ſed nunc, quod mirum videri poſſit, & quod vix fieri poſſe quis credat omnes ſequenti propoſitione complexi ſumus.

THEO-

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

DAtis ſex quantitatibus quarum primæ ratio ad ſecundum componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam; omnes modos neceſſarios, quibus ratio duarum quarumlibet, ex aliarum rationibus componitur, demonſtrare.

Sint datæ ſex quantitates. A.B.C.D.E.F. in quibus ratio A. primæ, ad B. ſecundam, ſit compoſita ex ratione C.tertię, ad D. quartam, & E. quintæ, ad F. ſextam; propoſitum ſit demonſtrare, proportiones ſex illarum quantitatum, octodecim modis, quos in tabulam ſuperiori ſcholio redegimus, directè, totidemque conuerſim componi poſſe.



Quoniam ratio A.ad B.componitur ex ratione C.ad D.& E. ad F. per primum modum datum, etiam ratio C. ad D. componetur ex ratione A.ad B.& F.ad E.qui vndecimus modus eſt. Item quia ratio A. ad B. componitur ex rationibus E.ad F.& C.ad D.etiam ratio E. ad F. componetur ex ratione A.ad B.& D.ad C. qui eſt modus decimus ſeptimus, atq; ita exiſtunt tres modi in quibus ratio

13.3.huius.

13.3.huius.

A.	B.		C.	D.	E.	F.	I.
C. ad	D.	ex ratione	A.	ad B.	& F. ad	E.	II.
E.	F.		A.	B.	D.	C.	17.

componitur; Iam vero in vnoquoque horum modorum ſex magnitudines pro ordine quem obtinent ordinalibus numeris

numeris insigniantur; ita vt in primo sit A. prima quantitas, B. secunda, C. tertia, &c. In secundo C. prima, D. secunda, A. tertia B. quarta F. quinta E. sexta, atque ita in reliquo, E. prima, F. secunda &c. Quoniam ratio A. ad B. componitur ex rationibus. C. ad D. ex E. ad F. etiam ratio A. ad B. componetur ex rationibus C. ad F. & E. ad D. qui secundus modus est; præterea quia ratio C. ad D. componitur ex rationibus A. ad B. & F. ad E. etiam ratio C. ad D. componetur ex rationibus A. ad E. & F. ad B. qui duodecimus modus est. Adhæc quia ratio E. ad F. componitur ex rationibus A. ad B. & D. ad C. eadem ratio E. ad F. componetur ex rationibus A. ad C. & D. ad B. qui est modus decimus octauus.

11.3. huius.

11.3. huius.

11.3. huius.

A.		B.		C.	F.	E.	D.	2
C.	ad	D.	ex ratione	A. ad	E. &	F. ad	B.	12
E.		F.		A.	C.	D.	B.	18

Rursus in vnoquoque horum modorum sex magnitudines pro ordine quem habent ordinali numero affectæ intelligantur. Quoniam ratio A. ad B. constat ex rationibus C. ad F. & E. ad D. etiam ratio C. ad F. conctabit ex rationibus A. ad B. & D. ad E. qui est modus 13. Item quoniam ratio C. ad D. conflatur ex rationibus A. ad E. & F. ad B. etiam ratio A. ad E. conflabitur ex rationibus C. ad D. & B. ad F. qui est modus quintus. Denique quia ratio E. ad F. componitur ex ratione A. ad C. & D. ad B. etiam ratio A. ad C. componetur ex rationibus E. ad F. & B. ad D. qui constituit tertium modum tabulæ.

13.3. huius.

13.3. huius.

13.3. huius.

C		F.		A.		B.		D.		E.	13.
A	ad	E.	ex	C.	ad	D.	&	B.	ad	F.	5.
A.		C.		E.		F.		B.		D.	3.

Præterea quia in proximis modis ratio primæ & secun-

dæ, componitur ex rationibus tertiæ & quartæ, & ratione quintæ & sextæ; probabimus ex sexta propositione tertij huius, quod ratio C. ad F. componitur ex rationibus A. ad E. & D. ad B. qui est modus decimus quartus. Item ratio A. ad E. componitur ex rationibus C. ad F. & B. ad D. qui est modus sextus tabulæ; denique ratio A. ad C. componitur ex rationibus E. ad D. & B. ad F. qui modus est quartus in tabula.

11.3.huius.

11.3.huius.

11.3.huius.

C.		F.		A.		E.		D.		B.	14.
A.	ad	E.	ex	C.	ad	F.	&	B.	ad	D.	6.
A.		C.		E.		D.		B.		F.	4.

13.3.huius. Eodem modo, quo supra, ex septima tertij huius, omisso primo trium posteriorum modorum, ex quo nihil noui amplius demonstrari potest, quoniam in secundo, ratio A. ad E. componitur ex rationibus B. ad D. & C. ad F. etiam ratio B. ad D. componetur ex rationibus A. ad E. & F. ad C. qui octauum modum tabulæ constituit; præterea quia in tertio ratio A. ad C. constituitur ex rationibus B. ad F. & E. ad D. etiam ratio B. ad F. constituetur ex rationibus A. ad C. & D. ad E. qui modus est decimus tabulæ.

13.3.huius.

13.3.huius.

B.		D.		A.		E.		F.		C.	8.
	ad		ex		ad		&		ad		
B.		F.		A.		C.		D.		E.	10.

11.3.huius. Eadem ratione, ex 6. tertij huius ratio B. ad D. componitur ex rationibus A. ad C. & F. ad E. qui est septimus modus, & ratio B. ad F. componitur ex rationibus A. ad E. & D. ad C. qui est nonus modus. At vero ex 7. tertij huius. Quoniam ratio B. ad F. componitur ex rationibus A. ad C. & D. ad E. etiam ratio D. ad E. componetur ex rationibus B. ad F. & C. ad A. qui 16. modus est in tabula.

11.3.huius.

13.3.huius.

B.

B.	D.	A.	C.	F.	E.	7
B. ad F. ex A. ad E. & D. ad C.						9
D.	E.	B.	F.	C.	A.	16

Denique in vltima ſerie quia ratio D. ad E. conſtat ex rationibus B. ad F. & C. ad A. ex propoſitione 12. 3. huius ratio D. ad E. conſtabit ex rationibus B. ad A. & C. ad F. qui eſt 15. modus.

11.3.huius.

D. ad E. ex B. ad F. & C. ad A. | 15.

Atque ita datis ſex quantitatibus, quarum primæ ratio ad ſecundam componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam, omnes modos neceſſarios directos quibus ratio duarum quarumlibet ex aliarum rationibus componitur demonſtrauimus.

Conuertentes autem ſuperiorum modorum, ex 12. huius aperte demonſtrantur; nam in omnibus ſi fuerit primæ ad ſecundam ratio compoſita ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam, etiam ratio ſecundæ ad primam componetur ex ratione quartæ ad tertiam, & ſextæ ad quintam. Quare etiam ſuperiorum modorum conuertentes demonſtrauimus; Quod propoſitum fuerat.

12.3.huius.

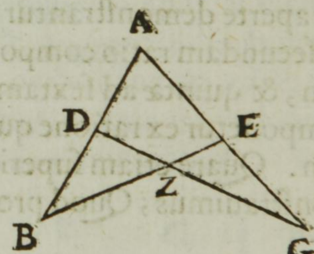
SCHOLIVM.

Hinc patet quam facilius, nnn ſolum modi omnes in Ptolomei prima coniugatione ſex quantitatum, vnica propoſitione demonſtrentur, quam infinitis, à Rainholdo comment. in c. 11. primi magnæ conſtructionis; ſed reliqui reliquarum quinque coniugationum modi, de quibus in Scholio præcedentis propoſitionis, ac omnino omnes compoſitiones rationum neceſſariæ, quæ inter ſex quaslibet quantitates exiſtant: quod ingens compendium eſt, ac ni fallor magnum in Geometricis vſum habebit.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

SI prima recta & secunda angulum faciant à quarum etremitatibus ducantur tertia ab extremitate primæ, & quarta ab extremitate secundæ in punctum concurrentes, & in oppositas rectas quæ angulum prius faciebant, incidentes, ita vt quarta primam bifariam diuidat: erit vt prima incidentium ad segmentum superius, ita incidentium secunda ad medietatem segmenti inferioris.

FACIAT prima AG. cum secunda AB. angulum ad A. & ab extremitatibus primæ & secundæ G. & B. ducantur GD. tertia & BE. quarta concurrentes in puncto. Z. & secet GD. oppositam rectam AB. in D. & BE. oppositam AG. bifariam in E. Dico esse vt GD. ad DZ. ita EB. ad medietatem ipsius BZ. Vocentur autem AG. prima quantitas AB. secunda GD. incidentium prima: BE. incidentium secunda. Z. punctũ concursus. EA. DA. ZE. ZD. segmenta superiora. ZG. ZB. EG. DB. segmenta inferiora.



Quoniam ratio GA. ad AE. cōponitur ex rationibus GD. ad DZ. & BZ. ad BE. vt ex Ptolemæo probauimus in Scholio 15. huius, etiam ratio GD. ad DZ. componetur ex rationibus GA. ad AE. & EB. ad BZ. id est ex rationibus EB. ad BZ. & GA. ad AE. Igitur cum primæ GD. ad secundam DZ. ratio componatur ex rationibus tertiæ EB. ad quartam BZ. & quintæ AG. ad sextã AE. erit vt GD. ad DZ. ita EB. ad aliam ad quam sit quarta BZ. vt GA. quinta ad sextam AE. Sed GA. ad AE. ex hypothesi

Schol. 15. huius. 13. huius. 10. 3. huius.

habet

habet rationẽ duplam, ergo vt GD. ad DZ. ita EB. ad aliam ad quam BZ. habet proportionem duplam, id est ad dimidiam ipsius BZ. Quod erat propositum.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

Iisdem positis: erit vt segmentum secundæ quantitatis superius, ad inferius, ita segmentum superius secundæ incidentium ad medietatem inferioris.

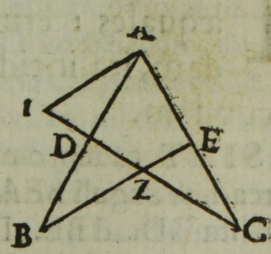
SINT eadem quæ superiori propositione. Dico esse vt AD. ad DB. ita ZE. ad medietatem ipsius BZ. Quoniam ratio AG. ad GE. constat ex ratione AD. ad DB. & BZ. ad ZE. Quod demonstrat Theon sexta prop. in 12. caput 1. Almagesti, & Erasmus Rainholdus in idem caput (quod ipse vndecimum statuit) proposit. 2. & nos sequenti Scholio ex illis authoribus demonstrabimus; erit etiam ratio AD. ad DB. composita ex ratione AG. ad GE. & ZE. ad BZ. seu quod idem est ex rationibus ZE. ad BZ. & AG. ad GE. Igitur vt AD. ad DB. ita ZE. ad aliam ad quam BZ. habeat rationem quam AG. ad GE. sed AG. ipsius GE. ponitur dupla. Igitur vt AD. ad DB. ita ZE. ad eam cuius BZ. sit dupla, id est, ad dimidiam BZ. Quod statutum fuerat demonstrare.

13.3. huius.

10.3. huius.

SCHOLIVM.

Quod vero ratio AG. ad GE. componatur ex rationibus AD. ad DB. & BZ. ad ZE. ita ex supradictis auctoribus demonstratur. Sit enim vt in Scholio 15. huius figura 2. æquidistans AI. rectæ EB. & producatur ad ipsam GDI. erit ratio AG.



GE.

GE. eadem rationi AI. ad EZ. & assumpta BZ. erit ratio AI. ad EZ. hoc est. AG. ad GE. composita ex rationibus AI. ad BZ. & BZ. ad ZE. est autem ratio AI. ad BZ. eadem rationi AD. ad DB. Igitur ratio AG. ad GE. constat ex rationibus AD. ad DB. & BZ. ad ZE.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

IIsdem positis: erit vt secunda quantitas ad segmentum inferius, ita segmentum inferius primæ incidentium ad superius.

SINT eadem quæ 17. huius. Dico esse vt BA. ad DB. ita GZ. ad ZD. Quoniam ratio GE. ad EA. componitur rationibus GZ. ad ZD. & DB. ad BA. vt ex Ptolemæi c. 12. magnæ syntaxeos probauimus schol. 15. huius, etiam ratio GZ. ad ZD. componetur ex rationibus GE. ad EA. & BA. ad BD. seu quod idem est ex rationibus BA. ad DB. & GE. ad EA. Igitur vt GZ. ad ZD. ita BA. ad aliam ad quam DB. habeat eam rationem quam GE. ad EA. sed GE. ponitur æqualis ipsi EA. Ergo vt GZ. ad ZD. ita BA. ad æqualem ipsi DB. nimirum ad ipsam DB. Quod concludere volebamus.

13.3. huius.

10.3. huius.

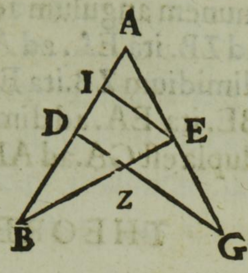
THEOREMA XX. PROPOS. XX.

IIsdem positis, sint præterea anguli BEA. BDG. æquales: erit vt prima quantitas ad secundam, ita incidentium prima ad incidentium secundam.

SINT eadem omnia quæ in schemate 17. huius, & præterea sint anguli BEA. BDG. æquales: Dico esse vt GA. ad AB. ita GD. ad BE. Ducatur EI. ipsi GD. parallela. Hinc ad duas GD. BE. constituatur tertia IE. erit ratio GD. ad IE.

com-

compoſita ex rarionibus GD. ad BE.& BE.ad IE. Rurſus inter GA. AE. ponantur duæ intermediæ BZ. ZD.erit ratio GA.ad AE. cõpoſita ex tribus rationibus GA. ad BZ. & BZ. ad ZD. & ZD. ad AE. vt vero GA. ad AE.ita GD.ad IE. (æquiangula enim ſunt triangula GAD. EAI. ob parallelas IE.GD. quæ efficiunt angulos externos IEA. EIA. æquales internis AGD. ADG.) Quare ex duabus proportionibus æqualibus GD.ad IE. & GA. ad AE. prima ex duabus rationibus GD. ad BE. & BE. ad IE. compoſita eſt; ſecunda ex tribus GA. ad BZ. & BZ. ad ZD. & ZD. ad AE. compoſita eſt, æquales igitur ſunt duæ rationes GD.ad BE.& BE.ad IE.tribus rationibus GA.ad BZ.& BZ.ad ZD. & ZD.ad AE. (æqualium enim quantitatum æquales ſunt omnes partes ſimul ſumptæ.) Igitur ex duabus primis rationibus auferatur ratio BE. ad IE. & ex tribus poſterioribus ratio BZ. ad ZD. quæ æqualis ſeu eadem eſt rationi BE. ad IE. (æquiangula enim ſunt triangula BEI. BZD. ob communem angulum ad B. & ob duas paeallelas DZ. IE. quæ efficiunt angulos externos BDZ.BZD. æquales internis BIE. BEI.) remanet ratio GD. ad BE. æqualis rationibus GA.ad BZ. & ZD. ad AE. Cum igitur ratio GD. primæ ad BE.ſecundam ſit compoſita ex rationibus GA.tertiæ ad BZ. quartam,& ZD.quintæ ad AE.ſextam,etiam ratio GD. primæ ad BE.ſecundam, (ex 11.huius) componetur ex rationibus GA. tertiæ ad AE. ſextam, & ZD. quintæ ad BZ. quartam, ſeu quod idem eſt ratio GD. ad BE. componetur ex rationibus ZD. ad BZ. & GA. ad AE. Igitur vt GD. ad BE.ita ZD.ad aliam ad quam BZ.ſit vt GA. ad AE. (ex 10. tertij huius.) Sed GA.eſt ipſius AE.dupla, ſeu AE. eſt ipſius GA.dimidia: igitur vt GD.ad BE. ita ZD.ad dimidiam ipſius BZ. Sed vt ZD.ad dimidium BZ.ita EA.ad dimidium AB. (æquiangula enim ſunt triangula BDZ. BEA.ob communem



4. 6.

29. 1.

29. 1.

11.3.huius.

10.3.huius.

32. 1.

munem angulum ad B. & æquales ad D. E. ideoque vt DZ. ad ZB. ita EA. ad AB. & consequentium dimidia vt DZ. ad dimidium ZB. ita EA. ad dimidium AB.) Igitur vt GD. ad BE. ita EA. ad dimidium AB. & posteriorum terminorum dupla est GA. ad AB. vt GD. ad BE. Quod &c.

15. 5.

15. 5.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

Iisdem positis, sint præterea anguli BEA. BDG. æquales: erit vt secunda quantitas ad incidentium secundam, ita segmentum superius incidentium secundæ ad dimidium segmenti superioris quantitatis secundæ.

SINT eadem omnia quæ superiori propositione. Dico esse vt BA. ad BE. ita ZE. ad medietatem DA. Quoniam parallelæ sunt IE. DZ. ex hypothesi, erit vt BZ. ad ZE. ita BD. ad DI. assumatur extrinsecus media DA. constabit ratio BD. ad DI. id est BZ. ad ZE. ex rationibus BD. ad DA. & DA. ad DI. vt autem AD. ad DI. ita AG. ad GE. Igitur ratio BZ. ad ZE. composita est ex ratione BD ad DA. & ex AG. ad GE. Quare per tertium modum 16. huius erit ratio BZ. ad BD. composita ex rationibus ZE. ad DA. & AG. ad GE. Igitur vt BZ. ad BD. ita ZD. ad medietatem DA. ad quam integra DA. rationem habet quam AG. ad sui dimidium GE. Vt autem BZ. ad BD. ita BA. ad BE. (æquiangula enim sunt triangula BDZ. BEA. ob communem angulum ad B. & angulos BDZ. BEA. qui æquales ponuntur.) Igitur vt BA. ad BE. ita ZE. ad medietatem DA. Quod erat &c.

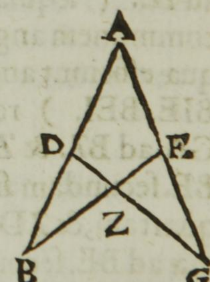
3. 6.

3. & 4. 6.

16. 3. huius.

10. 3. huius.

32. 1.

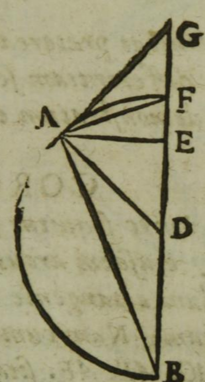


THEO-

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

CHordæ duorum arcuum inæqualium ſemicirculum complentium, eamdem habent rationem quam ſecans arcus minoris cum ſinu toto ad tangentem eiuſdem arcus, aut quam tangens ad differentiam ſecantis.

SIT circulus FAB. cuius centrum D. diameter BF. arcus minor FA. maior ſemicirculum complens AB. Chorda arcus minoris AF. maioris AB. ſinus totus DA. Tangens eiuſdem arcus FA. recta GA. ducta ex puncto A. ad punctum G. in diametro producta; ideoque DG. ſecans arcus FA. & GF. eius differentia FE. ſinus rectus AE. verſus FE. complementi ED. & recta BG. compoſita ex ſinu toto BD. & ſecante DG. Dico eam eſſe rationem BA. ad AF. quæ eſt BG. ad GA. aut GA. ad GF. Erunt enim triangula BAF. & GAD. rectangula ad A. quæ diuidentur perpendiculari AE. communi ad baſim in triangula ſimilia, eritque vt BE. ad EA. ita EA. ad FE. ideoque quadratum AE. tam rectangulo BEF. quam rectangulo GED. æquale eſt. Igitur æqualia ſunt rectangula BEF. GED. atque adeo vt BE. ad ED. ita GE. ad EF. & diuidendo vt BD. ad DE. ita GF. ad FE. ſed vt BD. ad DE. ita AD. ad DE. quod æquales ſint, BD. AD. & vt AD. ad DE. ita GA. ad AE. ergo vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. & permutando, ac conuertendo, vt GA. ad GF. ita AE. ad EF. ſed vt AE. ad EF. ita BA. ad AF. ergo vt GA. tangens arcus AF. ad GF differentiam ſecantis, ita chorda BA. ad chordam AF. Rurſus cum rectangulum BGF. ſit æquale quadrato GA. erit vt AG. ad GF. ita BG. ad GA. ideoque vt



31. & 18. 3.
8. 6.
4. 6.
17. 6.
1. pron.
14. 6.
15. defin.
8 6.
11. 5.
8. 6.
36. 6.
14. 6.

chorda BA. ad chordam AF. ita BG. composita ex sinu toto, & secante arcus AF. ad GA. tangentem eiusdem arcus AF. Quod erat propositum.

COROLLARIVM. I.

EX dictis manifestum est esse vt sinum totum ad suum complementi arcus, ita differentiam secantis ad sinum versum. probatum enim est esse vt BD. ad DE. ita GF. ad FE.

COROLLARIVM. II.

COnstat præterea esse vt tangentem ad sinum rectum, ita differentiam secantis ad sinum versum eiusdem arcus. Nam demonstratum est esse vt GF. ad FE. ita GA. ad AE.

COROLLARIVM. III.

ADhæc sequitur si ex eodem puncto circuli ad diametrum, eiusdem arcus tangens, chorda, atque sinus ducantur; angulum à tangente & siuu recto contentum à chorda secari bifariam. Nam cum ex eodem puncto A. ad diametrum ductæ sint AG. AE. AF. sitque vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. angulus GAE. diuiditur bifariam à chorda AF. 3. 6.

COROLLARIVM. IV.

DEnique probatum est esse vt BG. ad GA. ita GA. ad GF.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

QVadratum circulo inscriptibile ad quadratum chordæ arcus Quadrante minoris rationem habet quam secans eiusdem arcus ad suam differentiam; aut quam sinus totus ad sinum versum.

SINT

Sint eadem quæ ſuperiori propoſitione. Dico eſſe quadratum circulo inſcriptibile ad quadratum cordæ AF. arcus AF. quadrante minoris, vt eſt ſecans eiuſdem arcus AF. ad GF. eiuſdem ſecantis differentiam; aut vt eſt DF. ſinus totus ad FE. ſinum verſum: Nam cum ſit vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. & AD. hoc eſt FD. ad DE. & GD. ad DA. id eſt ad DF. erit vt FD. ad DE. ita GD. ad DF. & per conuerſionem rationis vt DF. ad FE. ita DG. ad DF. Aſſumantur duæ BF. BF. ſeu eadem BF. bis, erit per primam tertij huius vt rectangulum ſub BF. DG. ad rectangulũ ſub BF. GF.

Coroll. 2.
22.3. huius.
8. 6.
11. 5.
1.3. huius.

DG.	GF.	DF.	FE.
BF.	BF.		

ita rectangulum ſub BF. DF. ad rectãgulum ſub BF. FE. ſed vt rectangulum ſub BF. DG. ad rectangulum ſub BF. GF. ita DG. ad GF. ergo vt DG. ad GF. ita rectangulum BFD. ad rectangulum BFE. at vero rectangulo BFD. æquale eſt quadratum circulo inſcriptibile cum vtrumque quadrati DF. ſit duplum, & rectangulo BFE. æquale eſt quadratum AF. Igitur vt DG. ſecans arcus AF. ad FG. ſecantis differentiam, ita Quadratum circulo inſcriptibile, ad Quadratum chordæ FA. Vt autem DG. ad GF. ita oſtenſum eſt paulo ante eſſe DF. ſinum totum ad EF. ſinum verſum: vt ergo DF. ad EF. ita quadratum circulo inſcriptibile, ad quadratum chordæ FA. Quod erat &c.



1. 6.
8. & 17. 6.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

QVadratum chordæ ad quadratum tangentis eiuſdem arcus eſt vt quadratum circulo inſcriptibile ad rectangulum ſub ſecante eiuſdem arcus, & ſecante cum ſinu toto.

SINT eadem quæ duabus superioribus propositionibus. Dico esse quadratum chordæ AF. ad quadratum tangentis AG. vt quadratum circulo inscriptibile ad rectangulum BGD. contentum secante DG. & secante cum sinu toto, BG. Nam cum sit vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. id est GD. ad DA. seu GD. ad ad DF. si assumantur BG. BF. erit vt rectangulum BG. GD. ad rectangulum BF. DF. ita rectangulum



Coroll. 2. 22. 3. huius. 8. 6. 1. 3. huius.

GD.	DF.	GF.	FE.
BG.	BF.		

BG. GF. ad rectangulum BF. FE. & conuertendo erit rectangulũ BFD. ad rectangulum BGD. vt rectangulũ BFE. ad rectangulum BGF. Sed rectangulo BFD. æquale est quadratum circulo inscriptibile, vt constat ex progressu superioris propositionis, & rectangulo BFE. est æquale quadratum FA. & rectangulo BGF. quadratum GA. Igitur erit vt quadratum circulo inscriptibile ad rectangulum BGD. ita quadratum AF. ad quadratum AG. Quod erat demonstrandum.

8. & 17. 6. 36. 3.

COROLLARIVM.

EX demonstratis constat esse vt rectangulum BFD. ad rectangulum BGD. ita quadratum FA. ad quadratum GA. Nam probatum est esse vt rectangulum BFD. ad rectangulum BGD. ita rectangulum BFE. id est quadratum AF. ad rectangulum BGF. id est quadratum GA.

THEO-

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

Quadratorum chordarum inæqualium semicirculum complentium maius ad minus rationem habet quam sinus totus compositus cum sinu complementi arcus cui minor chorda subtenditur, ad sinum versum eiusdem arcus, & quam secans eiusdem arcus composita cum sinu toto ad differentiam secantis.

Supponantur adhuc superiora diagrammata. Dico quadratum BA. ad quadratum AF. esse vt BE. ad EF. & vt BG. ad GF. Cum enim sit vt EF. ad GF. ita EA. ad AG. & permutando vt EF. ad EA. id est EA. ad EB. ita FG. ad AG. sed est etiam vt FG. ad AG. ita GA. ad GB. erit ergo vt EA. ad EB. ita GA. ad GB. & permutando vt EA. ad GA. id est EF. ad FG. ita EB. ad GB. & permutando ac conuertendo vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. Rursus cum quadrato BA. sit æquale rectangulum FBE. & quadrato FA. rectangulum BFE. habeantque dicta rectangula communem basim BF. erunt vt altitudines BE. EF. Igitur vt BE. ad EF. ita rectangulum FBE. ad rectangulum BFE. id est quadratum BA. ad quadratum AF. sed etiam paulo ante ostensum est esse vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. ergo vt BG. ad GF. ita quadratum BA. ad quadratum AF. Quod propositum fuit demonstrare.

Coroll. 2. 22.3. huius.

Coroll. 4. 22.3. huius. 11. 5.

8. & 17. 6.



COROLLARIVM. I.

Hinc patet esse vt quadratum sinus totius ad quadratum tangentis arcus, ita sinum complementi dicti arcus ad differentiam sinus complementi & secantis. Nam si ponatur

BA.

BA. sinus totus in triangulo rectangulo AEB. erit AF. tangens anguli ABF. & BF. secans eiusdem anguli, & BE. sinus rectus anguli BAE. qui est complementum anguli ABF. & EF. differentia secantis BF. & sinus complementi BE. est autem probatum esse vt quadratum BA. ad quadratum AF. ita BE. ad EF.

COROLLARIVM. II.

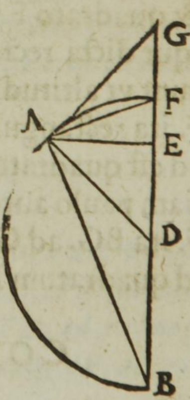
C*Onstat etiam esse vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. hoc enim in progressu demonstrationis ostendebamus.*

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

QVadratum tangentis arcus Quadrante minoris ad quadratum sinus totius rationem habet quam rectangulum sub aggregato sinus totius, & secantis ac sinu verso, ad rectangulum sub sinu toto, & sinu complementi.

SINT eadem omnia quæ superioribus propositionibus. Dico esse quadratum AG. ad quadratum AD. vt rectangulum sub BG. FE. ad rectangulum BDE. Quoniam est vt GF. ad FE. ita GA ad AE. id est AD. ad DE. id est FD. ad DE. erit vt GF. ad FE. ita FD. ad DE. & permutando vt GF. ad FD. ita FE. ad DE. Assumantur duæ BG. BD. erit vt rectangu-

Coroll. 2. 22.3. huius. 8. 6. 13. 5. 1.3. huius.



GF.	*FD.*	*FE.*	*DE.*
BG.	*BD.*		

lum sub BG. GF. ad rectangulum sub BD. FD. ita rectangulum sub BG. FE. ad rectangulum sub BD. DE. sed rectangulo

gulo

gulo BG*F*. est æquale quadratum AG. & rectãgulo sub BD. *F*D. quadratum AD. vt igitur quadratum AG. ad quadratum AD. ita rectangulum BG. E*F*. ad rectangulum BDE. Quod intendebamus demonstrare. 36. 3.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

Sinus versus ad sinum totum cum secante rationẽ habet, quam rectangulũ sub sinu complementi & sub sinu verso, ad rectangulum sub sinu toto, & sub aggregato sinus totius & sinus complementi.

In schemate superiori. Dico esse vt EF. ad BG. ita rectangulum DEF. ad rectangulum DBE. Cum enim sit vt EF. ad FG. ita EA. ad AG. id est ED. ad DA. seu ED. ad DB. erit vt EF. ad FG. ita ED. ad DB. & cum sit vt BG. ad GF. ita BE. ad EF. erit ratio composita ex *E*F. ad FG. & FG. ad BG. eadem. quæ compositæ D*E*. ad BD. & *E*F. ad *E*B. Igitur ex 3. 3. huius vt *E*F. ad BG. ita rectangulum D*E*F. ad rectangulum *E*BD. Quod demonstrare oportuit.

Coroll. 2.
22. 3. huius.
8. 6.
Coroll. 2.
25. 3. huius.
3. 3. huius.

*E*F.	FG.	D*E*.	BD.
FG.	BG.	*E*F.	EB.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

Qvadrata sinus totius, chordæ arcus quadrante maioris, & chordæ arcus qui prioris sit complementum ad duos rectos ordine coniuncto habent eam rationem quam tria rectangula, primum sub secante & sinu toto; secundum sub diametro & secante cum sinu toto;

ter-

tertium ſub differentia ſecantis & diametro. Ac tam quadrata quam rectangula ordine, ac coniunctim ſe habent vt ſinus totus; duplum compoſiti ex ſinu complementi & ſinu toto; & duplum ſinus verſi minoris arcus: aut etiam ordine hæc ternam rationem habent quam ſecans, duplum ſecantis cum ſinu toto, & duplum differentiæ ſecantis.

Repetantur figuræ præcedentes cum ἔκθεσει prop. 22. huius. Dico quadrata rectarum BD. BA. AF. eam habere ordine rationem, quam habent tria rectangula GDF. GBF. G*F*B. Item quam tres rectæ DF. duplum B*E*. duplum F*E*. Item quam tres rectæ DG. duplum BG. & duplum FG. Quoniam tria trectangula ſub FB. FD; & ſub FB. & dupla B*E*; & ſub FB. & dupla F*E*; ha bent eandem baſim FB. erunt ordine vt altitudines F*D*. duplum *BE*. & duplum F*E*. ſed rectanguli ſub F*B*. F*D*. dimidium eſt quadratum F*D*; & rectanguli ſub F*B*. ac duplo *BE*. dimidium eſt rectangulum F*BE*. ac denique rectanguli ſub duplo F*E*. & F*B*. dimidium eſt rectangulum *B*F*E*. quæ omnia ſe habent vt ſua dupla; ergo quadratum F*D*. rectangulum F*BE*. & rectangulum *BFE*. inter ſe ſunt ordine, vt tres rectæ *FD*; duplum *BE*. & duplum *FE*. Rectangulo autem *FBE*. eſt æquale quadratum A*B*. & rectangulo *BFE*. quadratum A*F*. (nam cum in trianguli rectanguli *BAF*. baſim *BF*. ex angulo recto A. demiſſa ſit perpendicularis A*E*. erit vt *FB*. ad *B*A. ita BA. ad *BE*. ideoque quadratum A*B*. æquale rectangulo *FBE*. & vt *B*F. ad FA. ita FA. ad F*E*. ideoque quadratum FA. æquale rectangulo *BFE*.) Igitur quadrata *FD*; *B*A; A*F*; inter ſe ordine ſunt, vt tres rectæ *FD*. dupla *BE*. & dupla *FE*.

Rurſus cum oſtenſum ſit ſuperius eſſe vt G*F*. ad *FE*. ita GA. ad A*E*. id eſt G*D*. ad *DA*. ſeu G*D*. ad *D*F. erit vt GF. ad *FE*. ita G*D*. ad *DF*. & conuertendo, vt *FE*. ad FG. ita *DF*. ad *D*G. Item cum ſit vt GF. ad FE. ita GA. ad A*E*. id eſt

[Margin notes: 1. 6. — 15. 5. — 8. & 4. 6. — 17. 6. — Coroll. 2. 22. 3. huius. — 8. 6.]

AD.



AD. ad DE. seu BD. ad DE. erit componendo vt GE. ad EF. ita BE. ad ED. & permutando, ac componendo, vt GB. ad BE. ita FD. ad DE. id est AD. ad DE. id est GA. ad AE. id est GF. ad FE. Quare vt GF. ad FE. ita GB. ad BE. & conuertendo vt FE. ad GF. ita BE. ad GB. sed etiam paulo ante ostensum est esse vt FE. ad GF. ita DF. ad DG. erit igitur vt DF. ad DG. ita BE. ad GB. & FE. ad GF. & permutando, vt DF. ad BE. ita DG. ad GB. est autem vt BE. ad FE. ita GB. ad GF. ideoque vt DF. ad duplum BE. ita DG. ad duplum BG. & vt duplum BE. ad duplum FE. ita duplum BG. ad duplum FG.

8. 6.

Coroll. 2. 25. 3. huius.

DF.	Duplum BE.	Duplum FE.
DG.	Duplum BG.	Duplum FG.

Cum igitur quadrata DF. BA. FA. ordine se habeant vt DF; duplum BE; & duplum FE; & vt tres illæ rectæ ita ordine sint DG. duplum BG. duplum FG. habebunt quadrata DF. BA. FA. eam ordine rationem quam tres rectæ DG. duplum BG. & duplum FG.

Denique tria rectangula sub GD. FB; & sub duplo GB. & FB; & sub duplo FG. & FB; cum habeant eandem basim FB. erunt ordine ac coniunctim vt tres altitudines GD; duplum GB; duplum FG. Sumpto autem in vno quoque rectangulo dimidio vnius lateris, erit rectangulum sub GD. & FD. dimidio ipsius FB. & rectangulum sub GB. FB. medietas prioris rectanguli sub duplo GB. & FB. & rectangulum sub FG. FB. medietas rectanguli sub duplo FG. & FB. Eruntigitur rectangula GDF. GBF. GFB. vnumquodque in ratione rectanguli dupli; sed rectangula dupla ostensa sunt esse in ratione rectarum DG. dupli GB. dupli FG. Igitur rectangula GBF. GDF. GFB. sunt ordine vt DG. duplum BG. Duplum FG. sed eandem ordine ac coniunctim ratione habent

1. 6.

15. 5.

quadrata DF. BA. FA. Igitur ordine, ac coniunctim eam rationem habent quadrata DA. BA. FA. quam rectangula GDF. GBF. GFB. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

TRia Quadrata tangentis; chordæ; & ſinus recti eiuſdem arcus inter ſe rationem habent ordine coniunctam quam ordine perturbato habent, compoſita ex ſinu toto & ſecante; dupla ſinus complementi; & dupla ſecantis. Et quadratum tangentis ad quadratum ſinus recti eiuſdem arcus rationem habet quam ſecans ad ſinum complementi.

Repetatur adhuc ſuperiorum propoſitionum delineatio, in qua arcus AF. tangens GA. ſinus rectus AE. chorda AF. Item ſecans DG. ſinus complementi ED. & compoſita ex ſinu toto BD. & ſecante DG. recta BG. Dico Quadrata GA. FA. EA. ordine, ac coniunctim habere rationem quam habent ordine perturbato tota BG; & dupla ſinus complementi ED; & dupla ſecantis DG. id eſt eſſe vt quadratum GA. ad quadratum FA. ita BG. ad duplam ſinus complementi ED. & vt quadratum FA. ad quadratum EA. ita HB. dupla ſecantis ad rectam BG. compoſitam ex ſinu toto, & ſecante.



Producatur BG. in qua ipſi GF. ſumatur æqualis GH. erit recta BH. dupla ſecantis DG. nam cum æquales ſint BD. DF. ſi æquales addantur FG. GH. erunt totæ DG. & compoſita

15. defin. 2. pron.

ex

ex BD. GH. æquales; eſt autem DG. ſecans, igitur duæ BD. GH. ſecanti ſunt æquales; tota igitur BH. ex duabus ſecantibus conſtat, ideoque ſecantis DG. dupla eſt.

Rurſus conſtat rectangulum BGF. quadrato GA. eſſe æquale; item rectangulum BFE. quadrato AF. & rectangulum BEF. quadrato AE. (Nam ob ſimilitudinem triangulorum BFA. AFA. item BEA. AEF. eſt vt BF. ad FA. ita FA. ad FE. Item vt BE. ad EA. ita EA. ad EF. ideoque tam rectangulum BFE. quadrato FA. quam rectangulum BEF. Quadrato AE. eſt æquale.)

36. 3.
8. 6.
4. 6.
17. 6.

Rectangula autem BGF. BFE. habent rationem compoſitam ex ratione GB. ad BF. & GF. ad FE. vt vero GF. ad FE. ita GA. ad AE. (ob angulum GAE. bifariam ſectum recta AF.) & vt GA. ad AE. ita AD. ad DE. id eſt FD. ad DE. & vt FD. ad DE. (ſumpto terminorum duplo) ita duplum FD. ad duplum DE. id eſt FB. ad duplum DE. Igitur a primo ad vltimum, vt GF. ad FE. ita FB. ad duplum DE. Quare cum ratio BGF. BFE. ſit compoſita ex rationibus GB. ad BF. & BF. ad duplam DE. erit vt rectangulum BGF. ad rectangulum BFE. id eſt quadratum GA. ad quadratum FA. ita GB. ad duplam DE.

23. 6.
3. 6.
Coroll. 2.
22. huius.
8. & 4. 6.
15. 5.

Inſuper rectangula BFE. BEF. poſita communi altitudine EF. inter ſe ſunt vt baſes FB. EB. vt igitur FB. ad BE. ita rectangulum BFE. ad rectangulum BEF. Quoniam vero eſt vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. id eſt BG. ad GH. erit conuertendo, & componendo, vt FB. ad BE. ita HB. ad BG. ſed vt FB. ad BE. ita modo probatum eſt eſſe rectangulum BFE. ad rectangulum BEF. igitur rectangulum BFE. ad rectangulum BEF. id eſt Quadratum FA. ad quadratum EA. rationem habet quam HB. nimirum duplum ſecantis ad BG. compoſitam ex ſinu toto, & ſecante.

Coroll. 2. præcedentis prop.

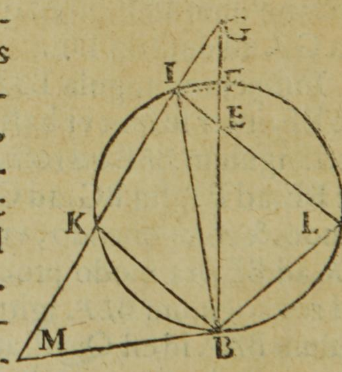
Cum igitur ſit vt GA. quadratum, ad quadratum FA. ita GB. ad duplum DE. vt probauimus in prima parte huius; & vt quadratum FA. ad quadratum EA. ita HB. ad BG. Conſtat quod primo proponebatur. Et ex æqualitate erit vt BH.

dupla secantis ad DE. duplam sinus complementi, ita Quadratum *GA.* ad quadratum EA. & priorum terminorum dimidia, vt secans D*G.* ad sinum complementi D*E.* ita quadratum *GA.* ad quadratum EA. Quod erat propositum.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI in triangulo rectangulo ex puncto vbi duo latera angulum rectum efficiunt, duæ rectæ circa alterutrum laterum ducantur, quarum altera extra, altera intra triangulum basim secet, efficientes cum dicto latere angulos æquales: erit vt composita ex basi & segmento exteriori, ad segmentum exterius, ita segmentorum interiorum remotius ab exteriori, ad vicinius.

SIT triangulum rectangulum BI*F.* cuius basis B*F.* latera circa angulum rectum I. sint IF. I*B.* ex puncto I. in basim ducantur duæ rectæ I*E.* intra triangulum I*G.* extra, facientes angulos *E*IF. *F*I*G.* æquales & secantes basim productam in tria segmenta, externum *GF.* interna BE. remotius ab externo, & EF. vicinius, ac contiguum. Dico esse vt *B*G. ad *G*F. ita *B*E. ad *E*F. Diametro BF. circa angulum rectum FIB. describatur circulus FI*B.* cadatque angulus rectus supra punctum contactus lineæ ductæ à puncto *G.* in circulum, & producantur *G*I. IE. quæ primo circulum secent in punctis KL. ac connectantur KB.*B*L. fiatque angulus K*B*M. (producta *G*K. in M.) æqualis angulo KB*G.* Quoniam æqualia sunt rectangula *BGF.* K*G*I. erit circa angulum *G.* vt *BG.* ad *G*I. ita K*G.* ad *G*F. & permutando vt *BG.* ad



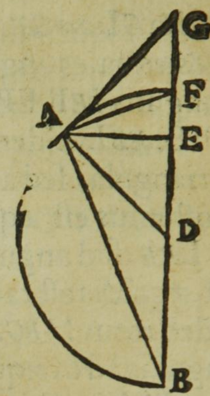
Schol. in 31. 3.

36. 3.
14. 6.

ad KG. ita GI. ad GF. æquiangula igitur sunt triangula GIF. GBK. & æquales anguli GIF. GBK. & GFI. GKB. Item cum in triangulis IEF. EBL. æquales sint anguli ad E. verticem, & duo FIE. EBL. eidem arcui FL. insistentes, æquiangula sunt tota triangula, sed angulo FIE. æqualis ponitur FIG. & ipsi FIG. ostensus est æqualis KBG. æquales igitur sunt anguli KBG. LBE. sed angulo KBG. factus est æqualis KBM. Igitur KBM. æqualis est tam angulo LBE. quam GIF. & FIE. atque ideo totus MBG. toti GIF. æqualis est, communis autem est angulus ad G. æqualis igitur est reliquus IEF id est BEL. reliquo BMK. Cum igitur duo triangula KBM. LBE. habeant duos angulos KBM. BMK. æquales duobus LBE. BEL. & latera KB. BL. æqualia (cum enim æquales sint anguli KBG. LBE. æquales erunt arcus FK. FL. ideoque & complementa ad duos rectos KB. LB. ac propterea etiam earum chordæ KB. LB. æquales) æquilatera erunt triangula KBM. BLE. & latus KM. æquale erit ipsi EL. & EB. ipsi BM. Igitur cum angulus GIE. sit diuisus bifariam recta IF. ex hypothesi erit vt GF. ad FE. ita GI. ad IE. & vt GI. ad IE. ita GB. ad BM. similia enim ostensa sunt triangula GIF. GBM. & vt GB ad BM. ita GK. ad KM. æquales enim positi sunt anguli KBG. KBM. ipsi autem KM. æqualis ostensa est EL. erit igitur vt GF. ad FE. ita GK. ad EL. Rursus cum sit vt GI. ad IE. ita GF. ad FE. erit permutando vt GI. ad GF. id est vt BG. ad GK. ita IE. ad FE. id est BE. ad EL. & permutando vt BG. ad BE. ita GK. ad EL. Cum igitur ostensum sit paulo ante esse GF. ad FE. vt GK. ad EL. & nunc esse vt GK. ad EL. ita BG. ad BE. erit vt FG. ad FE. ita BG. ad BE. & permutando, ac conuertendo, vt BG. ad GF. ita BE. ad EF. Quod propositum erat demonstrare.

6. 3.
15. 1.
27. 3.
32. 1.
32. 1.
15. 1.
26. 3.
2. pron.
29. 3.
26. 1.
3. 6.
3. 6.
3. 6.
4. 6.
15. 5.

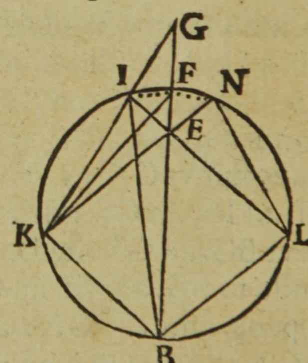
Quod si recta ducta ex G. circulum non secet, sed tangat in puncto A. sitque triangulum rectangulum BAF. cum cuius latere AF. faciant duæ AG. AE. angulos æquales GAF. FAE. Dico rursus vt BG. ad GF. ita esse BE. ad EF. Ducta enim ex centro circuli D. recta ad punctum contactus DA. faciet



18. 3. faciet angulum rectum DAG. rectus autem est & BAF. quare si cõmunis auferatur angulus FAD. remanebunt æquales GAF. DAB. sed ipsi GAF. ponitur æqualis FAE. & ipsi DAB. æqualis est
5. 1. DBA. æqualis igitur est totus
32. 1. GAE. duobus DAB. DBA. id est angulo GDA. Cum igitur duo triangula GAD. GAE. habeant angulum communem ad G. & angulus GAE. æqualis sit angulo ADE. etiam reliqui GEA. GAD. æquales erunt, rectus autem est GAD. igitur rectus est & GEA. Quare ex 2. Coroll. 25. huius erit vt BG. ad GF. ita BE. ad EF.

(31. 3.)

Denique cadat angulus rectus sub punctum contactus, vt in K. & sit triangulum rectangulum BKF. cum cuius latere KF. duæ rectæ KG. KE. faciant angulos æquales GKF. FKE. secentque dictæ lineæ circuli peripheriam in punctis I. N. & connectantur rectæ FN. FI. ac ducatur IE. secans peripheriam in L. rursumque connectantur KB. BL. Dico rursus esse vt GB. ad BE. ita GF. ad FE. Quoniam æquales sunt anguli GKF. FKE. æquales sunt &



26. 3. 29. 3. 27. 3. arcus IF. FN. æquales igitur rectæ IF. FN. & anguli IFE. NFE. Quare cum duo triangula EFI. EFN. habeant duo latera EF. FI. duobus EF. FN. æqualia & angulos EFI. EFN. dictis lateribus contentos ęquales & basim IE. basi EN. æqualem
4. 1. habebunt, & angulum IEF. angulo NEF. Rursus cum in trian-
27. 3. gulis KIE. LNE. angulus KIE. angulo LNE. vtpote eidem arcui KL. insistens æqualis sit, & angulus IKE. angulo NLE. itidem eidem arcui IN. insistens æqualis, & æqualia

latera

latera I*E*. *E*N. æqualia erunt & latera *E*K. *E*L. Quare cum in triangulis *E*KB. *E*LB. anguli K*EB*. L*EB*. æquales sint (sunt enim æquales angulis ad verticem N*EF*. I*EF*. qui modo ostensi sunt æquales) & circa eos latera B*E*. *E*K. lateribus *BE*. *E*L. æqualia erunt anguli K*BE*. L*BE*. æquales: angulo autem K*BE*. seu K*BG*. est æqualis angulus *G*IF. vt prima parte huius propositionis probatum est, & angulo L*BE*. angulus *F*I*E*. æquales igitur sunt anguli *G*I*F*. FI*E*. sed rectus est FI*B*. in semicirculo. Igitur per primam partem huius propositionis vt *BG*. ad *G*F. ita *BE*. ad *E*F. & permutando vt *GB*. ad *BE*. ita *GF*. ad F*E*. Quod propositum fuerat demonstrare.

26. 6.

4. 1.

31. 3.

COROLLARIVM. I.

Ex dictis manifestum est, si anguli GIF. FIE. ponantur æquales, angulos LBE. KBG. & arcus BL. BK. & LF. KF. etiam esse æquales, & si arcus KF. LF. & BL. BK. aut anguli LBE. KBG. ponantur æquales, sequi angulos GIF. FIE. esse æquales. Hoc enim in progressu primæ partis demonstrationis probatum est, nam semper angulus LBE. angulo FIE. & angulus KBG. angulo IFG. est æqualis: positis autem angulis LBE. KBG. æqualibus, æquales sunt arcus insistentes KF. LF. & eorum complementa KB. LB.

26. 3.

COROLLARIVM. II.

Constat præterea si anguli GKF. FKE. ponantur æquales, etiam arcus IF. FN. item arcus BL. BK. & eorum complementa LF. KF. esse æqualia. Quod vltima parte huius probatum est.

COROLLARIVM. III.

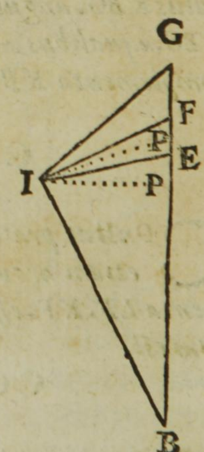
Denique si in triangulo rectangulo GAD. ex angulo recto GAD. in basim recta demittatur faciens angulum GAE. æqualem angulo ADG. rectam AE. esse perpendicularem ad basim

sim GD. hoc enim secunda parte huius probatum est, estque vna ex conuertentibus octaua sexti elementorum.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

SI in triangulo rectangulo ex puncto vbi duo latera angulum rectum efficiunt, duæ rectæ circa alterutrum laterum ducantur, quarum altera extra, altera intra triangulum basim secet, sitque vt composita ex basi & segmento exteriori ad sigmentum exterius, ita segmentorum interiorum remotius ab exteriori ad vicinius, efficient duæ illæ rectę cum latere trianguli circa quod ductæ sunt angulos æquales.

SINT eadem quæ priori propositione, nimirum sit triangulum rectangulum BIF. cuius basis BF. latera circa angulum rectum I. sint IF. I*B*. & ex puncto I. in basim duæ rectæ ducantur I*E*. intra triangulum IG. extra, facientes angulos *E*IF. *F*IG. & secantes basim productam in tria segmeuta externum G*F*. interna vero BE. remotins ab externo, & *E*F. vicinius ac continguum, sitque vt BG. ad GF. ita B*E*. ad *E*F. Dico angulos *G*IF. *G*IE. esse æquales. Si enim non sint æquales, sit primum *G*IF. maior quam FI*E*. & fiat FIP. æqualis ipsi *G*IF. cadatque punctum P. supra *E*. Quoniam rectus est angulus FI*B*. & æquales anguli *GIF*. FI*B*. erit per præcedentem vt *BG*. ad *GF*. ita *B*P. ad P*F*. sed etiam ex hypothesi est vt *BG*. ad *G*F. ita *BE*. ad *EF*. vt igitur *BE*. ad *EF*. ita *B*P. ad PF. & componendo vt *BF*. ad F*E*. ita *BF*. ad *F*P. æquales igitur sunt *EF*. P*F*. pars & totum: Quod



15. 5.

8. 5.

est

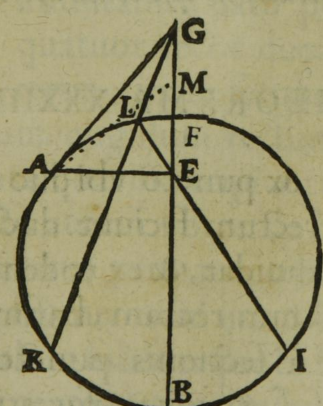
est absurdum. Idem sequetur si angulus *GIF*. ponatur minor angulo *FIE*. & punctum P. cadat infra *E*.

Neque aliter procedit demonstratio in alijs casibus, vt inducenti manifestissimum est. Igitur si in triangulo ex puncto &c. Quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

SI ex duobus punctis circumferentiæ circuli æqualiter a diametro remotis duæ rectæ ducantur quarum prior diametrum intra circulum, & peripheriam secet; posterior per punctum vbi prior peripheriam secat transiens in diametrum extra circulum incidat, ac ex puncto interno diametri ad diametrum perpendicularis ducatur peripheriam secans in puncto; recta ex hoc puncto ad punctum externum diametri ducta circulum tangit.

SIT circulus FAB. cuius diameter BF. a cuius puncto B. æqualiter remota sint I. K. in peripheria circuli, id est arcus BI. arcui BK. sit æqualis & ducta IL. secet diametrum intra circulum in E. & peripheriam in L. & ducatur per punctũ L. recta KL. quæ producta secet diametrũ productam in G. denique ex E. ad diametrum BF. ducatur perpendicularis EA. circuli peripheriam secans in A. & connectatur AG.



Dico quod recta AG. circulum tangit in A. si enim AG. non sit tangens, sit quæpiam alia vt AM. Cum arcus KB. BI. sint æquales, constat ex 30. 3. huius Coroll. 1. & 2. si ducatur LF. L*B*. angulo BLF. existente recto angulos ELF. *F*LG. esse æquales. Igitur ex 25. huius vt BG. ad GF. ita B*E*. ad EF. Rursus cum tangens sit, ex hypothesi, recta MA. & AE. sinus rectus arcus AF. patet ex Corol. 2. 25. huius esse vt BM. ad MF. ita BE. ad EF. Igitur vt BG. ad GF. ita BM. ad MF. & diuidendo vt BF. ad FG. ita BF. ad FM. æquales igitur sunt GF. MF. pars & totum. Quod est absurdum. Igitur si ex duobus punctis &c. Quod oportebat demonstrare.

Coroll. 2. 25. huius.

15. 5.

9. 5.

SCHOLIVM.

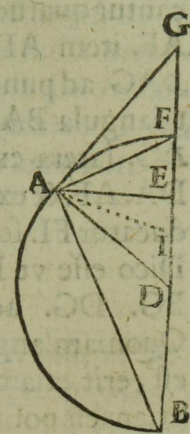
Hinc patet ratio facilis ducendi tangentem circuli ex dato puncto extra circulum, vt ex puncto G. Ducatur primum diameter GB. hinc recta GLK. vtcumque secans circulum in L. K. & auferens arcum KB. cui sumatur æqualis BI. & ex I. ducatur IL. secans diametrum in E. perpendicularis EA. ad diametrum secabit circulum in A. puncto contactus, vt ex demonstratis in ipso textu aperte constat.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

SI ex puncto vbi duo latera trianguli angulum rectum faciunt ducta recta basim bifariam diuidat, & ex eodem puncto perpendicularis ad dictam rectam, basim extra triangulum secet, atque à sectionis puncto perpendiculari æqualis in basi sumatur versus triangulum datum, ea basim trianguli in ratione laterum diuidet.

SIT

SIT triangulum BAF. rectangulum ad A. vnde demittatur AD. basim BF. bifariam secans in D. & ex A. ad AD. perpendicularis ducatur AG. secans basim productam in G. ac ipsi AG. æqualis sumatur GI. Dico esse vt BA. ad AF. ita BI. ad IF. Centro D. distantia DB. vel DF. describatur circulus qui transibit per A. & ducatur ex A. recta EA. perpendicularis ad BF. & connectatur IA. Quoniam angulo DAB. æqualis est DBA. & angulo DBA. æqualis FAE. ob perpendicularem AE. in basim trianguli rectanguli cadentem, æquales erunt anguli DAB. FAE. At quia rectæ GA. æqualis accepta est GI. ducta AI. angulum DAE. bifariam diuidet, vt propositione 40. primi huius demonstrauimus. Ergo si æqualibus BAD. FAE. æquales addantur EAI. DAI. erunt anguli BAI. FAI. æquales. Igitur vt BA. ad AF. ita BI. ad IF. Quod erat demonstrandum.



Schol. 31. 3.

8. 6.

40. 1. huius.

3. 6.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

SI ad datam rectam infinitam à dato puncto quod in ea non sit quatuor rectæ ducantur, quarum prima & tertia, item secunda & quarta ad datum punctum angulum rectum efficiant, & cum partibus datæ quas intercipiunt triangula rectangula; à puncto autem vbi tertia basim secat quartæ parallela ducatur primæ occurrens: erit vt tota parallela ad segmentum inter basim & secundam, ita rectangulum sub vtraque basium, ad rectangulum sub segmento medio, & segmento inter extremas comprehensum.

Datum sit punctum A. à quo in datam infinitam BG. ducantur quatuor rectæ AB. AD. AF. AG. efficiantque AB. AF. item AD. AG. angulos rectos BAF. DAG. ad punctum A. ita vt sint rectangula triangula BAF. DAG. quorum bases BF. DG. latera exteriora AB. AG. interiora DA. AF. & ex puncto F. parallela ipsi GA. ducatur FI. secans AB. in I. & AD. in H. Dico esse vt IF. ad FH. ita rectangulum BG. DG. ad rectangulum BG. DF. Quoniam angulus DAG. positione rectus est, erit etiam FHA. rectus, sed rectus etiam est positione IAF. æquiangula igitur sunt triangula IFA. AFH. estque vt IF. ad FA. ita AF. ad FI. ideoque æquale est quadratum AF. rectangulo IFH. Rursus quia similia sunt triangula GBA. FBI. (ob angulum communem ad B. & externos BFI. BIF. æquales internis BGA. BAG.) erit vt GA. ad FI. ita GB. ad BF. & conuertendo vt FI. ad GA. ita BF. ad GB. & ob eandem causam in triangulis æquiangulis DAG. DHF. est vt GA ad FH. ita GD. ad DF. Cum ergo sit vt FI. ad GA. ita BF. ad GB. & vt GA. ad FH. ita GD. ad DF. erit ex 3. 3. huius vt FI. ad FH. ita rectangulum BF. GD. ad rectangulum GB. DF. Quod propositum erat demonstrare.



29. 1. — 8. 6. — 4. 6. — 17. 6. — 29. 1. — 4. 6. — 3. 3. huius.

FI.	GA.	FH.	
BF.	GB.	GD.	DF.

COROLLARIVM. I.

Hinc etiam efficitur esse vt rectangulum BGD. ad rectangulum BFD. ita Quadratum GA. ad quadratum FA. cum enim ex demonstratis in propositione sit vt GA. ad FI. ita GB. ad BF. & vt GA. ad FH. ita GD. ad DF. erit proportio composita ex GA. ad FI. & ex GA. ad FH. eadem quæ composita ex GB. ad BF. & GD. ad DF. sed ratio composita ex GA.

ad

ad FI. & GA. ad FH. est eadem quæ quadrati GA. ad rectangulum IFH. id est ad quadratum FA. (quod rectangulo IFH. in propositione demonstratum est æquale) composita vero ex ratione GB. ad BF. & ex GD. ad DF. est eadem quæ rectanguli BGD. ad rectangulum BFD. vt ergo rectangulum BGD. ad rectangulum BFD. ita quadratum GA. ad quadratum FA. 23. 6. 23. 6.

COROLLARIVM. II.

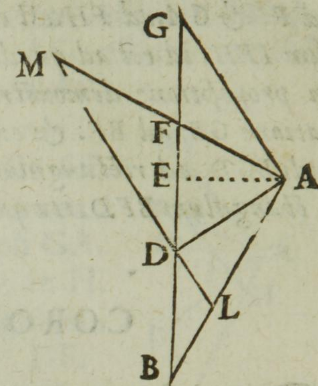
QVod si DA. DF. fuerint æquales, & descendat in BG. perpendicularis AE. erit vt FB. ad BE. ita rectangulum BF. GD. ad rectangulum GB. DF. Nam quia æquales sunt DA. DF. æquales erunt anguli EFA. HAF. recti autem sunt & anguli ad EH. igitur similia sunt triangula FEA. id est AEB. & AHF. id est IHA. Vt igitur IH. ad HA. ita FE. ad EA. & vt AH. ad HF. ita AE. ad EB. ergo ex æqualitate, & componendo, vt IF. ad FH. ita FB. ad BE. sed vt IF. ad FH. ita rectangulum BF. DG. ad rectangulum BG. DF. vt in propositione probatum est: vt igitur FB. ad BE. ita rectangulum BF. DG. ad rectangulum BG. DF. 5. 1. 8. 6. 4. 6.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

FAciant rursus rectæ AB AF. & rectæ DA. AG. in datam BG. cadentes ex dato puncto A. angulos rectos BAF. DAG. & ex puncto D. vbi secunda basim secat quartæ parallela ducatur L. M. secans primam AB. in L. & tertiam AF. in M. Dico esse vt LD. ad DM. ita rectangnlum BD. GF. ad rectangulum BG. FD.

NAM quia ob parallelas LD. AG. similia sunt triangula BLD. BAG. erit vt LD. ad AG. ita BD. ad BG. Rursus

sus quia ob parallelas AG. DM. similia sunt triangula DFM. GFA. erit vt AG. ad DM. ita GF. ad FD. cum igitur sit vt LD. ad AG. ita BD. ad BG. & vt AG. ad DM. ita GF. ad FD. erit ex 3.



3.3. huius.

LD.	AG.	DM.	
BD.	BG.	GF.	FD.

3. huius vt LD. ad DM. ita rectangulum BD. GF. ad rectangulum BG. FD. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM. I.

HInc facile deducitur esse vt quadratum GA. ad quadratum DA. ita rectangulum BGF. ad rectangulum BDF. nam cum ostensum sit esse vt LD. ad AG. ita BD. ad BG. erit conuertendo vt AG. ad LD. ita BG. ad BD. sed est etiam vt AG. ad DM. ita GF. ad FD. erit ergo proportio composita ex AG. ad LD. & AG. ad DM. eadem quæ composita ex BG. ad BD. & ex GF. ad FD. sed ratio composita ex AG. ad LD. & AG. ad DM. est ratio quadrati AG. ad rectangulum LDM. & ratio composita ex BG. ad BD. & ex GF. ad FD. est ratio rectanguli BGF. ad rectangalum BDF. igitur vt quadratum AG. ad rectangulum LDM. ita rectangulum BGF. ad rectangulum BDF. sed rectangulo LDM. est æquale quadratum AD. (Nam cum parallelæ sint DM. AG. & rectus sit angulus DAG. ex hypothesi rectus erit MDA. sed etiam positione rectus est LAM. Igitur similia sunt triangula LDA. DAM. & vt LD. ad DA. ita DA. ad DM. quare rectangulum LDM. quadrato AD. æquale est) vt ergo quadratum AG. ad quadratum AD. ita rectangulum BGF. ad rectangulum BDF.

23. 6.
23. 5.
8. 6.
4. 6.
17. 6.

COROL-

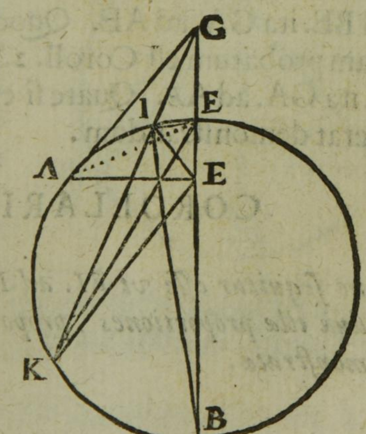
COROLLARIVM. II.

QVod si DA. DF. fuerint æquales, & descendat ex A. in GB. perpendicularis AE. Erit vt FE. ad EB. ita rectangulum BD. FG. ad rectangulum BG. DF. Nam cum æquales sint DA. DF. æquales erunt anguli DAF. DFA. Quare cum in triãgulis rectangulis AEF. ADM. æquales etiam sint anguli DAM. EFA. similia erunt triãgula FEA. id est AEB. & triãgula ADM. id est LDA. Igitur vt LD. ad DA. ita FE. ad EA. & vt DA. ad DM. ita EA. ad EB. ergo ex æquali, vt LD. ad DM. ita FE. ad EB. sed vt LD. ad DM. ita ostensum est rectangulum BD. FG. ad rectangulum BG. DF. igitur vt FE. ad EB. ita rectangulum BD. FG. ad rectangulum BG. FG.

8. 6.
4. 6.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXVI.

SI ex punctis diametri, ex quibus ad circumferentiam tangens, ac sinus rectus eiusdem arcus ducuntur, duæ aliæ rectæ peripheriam vbilibet in eodem puncto secent: habebit ea quæ ex puncto tangentis, ad eam quæ ex puncto sinus recti ducitur eandem rationem, quam tangens ad sinum rectum.



SIT circulus FAB. cuius diameter BF. arcus quilibet AF. cuius tangens AG. secans diametrũ productam in G. & sinus rectus AE. secãs diametrũ in E. sumatur quodlibet punctum I. in peripheria, & ducatur GI. EI. Dico esse vt GA. ad AE. ita GI. ad

31. 3. Coroll. 2. 25..huius. 31.3.huius. 3. 6. Coroll. 2. 22. huius. 11. 5.

IE. cadat primo punctum I. inter A. & F. & connectatur IF. Constat primo angulum FIB. in semicirculo rectum esse, Deinde manifestum est ex Corollario 2. 25. huius esse vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. & permutando ac conuertendo, vt BG. ad BE. ita GF. ad EF. Igitur, ex proposit. 31. huius, erit angulus GIF. æqualis angulo FIE. Ergo vt GI. ad IE. ita GF. ad FE. sed etiam ex Coroll. 2. 22. huius est vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. Igitur vt GI. ad IE. ita est GA. ad AE. Quod primo propositum erat.

Sed punctum assumptum in peripheria non sit inter F. & A. sed cadat inter A. & B. vt in K. & ducantur KE. KG. Itemque connectatur KF. Eodem modo quo prius, ostendemus cum angulus FKB. in semicirculo sit rectus, & sit vt GB. ad BE. ita GF. ad FE. angulum GKE. bifariam diuidi recta KF. erit igitur vt prius, vt GK. ad KE. ita GF. ad FE. & vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. ac proinde vt GK. ad KE. ita GA. ad AE.

Coroll. 2. 25.3.huius. Coroll. 2. 22.3.huius.

Cadat denique punctum assumptum in punctum, vbi diameter circululum secat, ac primum quidem in B. ac ducantur BG. BE. Dico esse vt BG. ad BE. ita GA. ad AE. Est enim ex Corollario 2. 25. huius vt BG. ad GF. ita BF. ad GF. & permutando vt BG. ad BE. ita GF. ad FE. sed vt FE. ad FE. ita GA. ad AE. ex Coroll. 2. 22. 3. huius. Igitur vt BG. ad BE. ita GA. ad AE. Quod si punctum assumptum sit B. Iam probatum est Coroll. 2. 22. 3. huius esse vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. Quare si ex punctis diametri &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM. I.

11. 5.

Hinc sequitur esse vt EI. ad IG. ita EK. ad KG. nam duæ illæ proportiones, proportioni EA. da AG. eædem sunt demonstratæ.

CO-

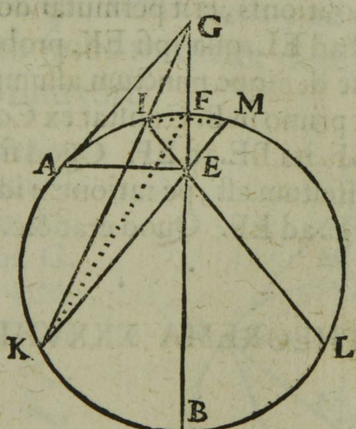
COROLLARIVM. II.

CONstat etiam angulos EIG. EKG. à rectis IF. KF. bifariam diuidi.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XXXVII.

SI ex quolibet puncto peripheriæ ad puncta diametri in qua incidunt tangens ac ſinus dati arcus, duæ rectæ ducantur circuli peripheriam in duobus punctis ſecantes; interceptæ inter puncta aſſumpta in peripheria & diametro, ad interceptas inter punctum diametri, & punctum ſectionis in peripheria ſunt in eadem ratione.

SIT circulus FAB. in quo arcus AF. cuius tangens GA. ſinus rectus AE. incidentes in diametrum BF. productam; ſumatur quodlibet punctum K. in peripheria, ex quo ad puncta G. E. ducantur rectæ KG. KEM. ſecantes, peripheriam illa in I. hæc in M. Erit KG. intercepta inter punctum aſſumptum K. & punctũ G. in diametro; IG. vero intercepta inter punctum ſectionis I. & punctum G. in diametro, recta vero KE. erit intercepta inter punctum aſſumptum K. & punctum E. in diametro, & EM. inter M. punctum ſectionis, & punctum E. Dico eſſe vt KG. ad GI. ita KE. ad EM.



Cadat primo punctum aſſumptum inter puncta A. B. in

36.3.huius. Coroll. 2. K. & iungantur IF. FM. EI. Quoniam æquales sunt anguli GKF. FKE. æquales erunt & arcus IF. FM. quibus insistũt, 29. 3. 26. 3. æquales igitur & chordæ IF. FM. & æqualia complementa IB. MB. arcuum IF. FM. quare æquales quoque IFE. EFM. illis insistentes cum igitur duo triãgula IFE. MFE. habeant circa angulos æquales IFE. EFM. duo latera EF. FI. duobus EF. FM. æqualia, erunt & bases IE. EM. æquales. Insu- 4. 1. per cum sit vt GK. ad KE. ita GI. ad IE. ex Coroll. 2. præ- Coroll. 2. 36.. huius. cedentis, erit permutando vt GK. ad GI. ita KE. ad IE. id est ad EM. quæ ipsi IE. ostensa est æqualis.

Sit secundo punctum assumptum inter puncta AF. videlicet in I. & ducantur GIK. IEL. Dico rursus esse vt IG. ad GK. ita IE. ad EL. Nam cum æquales sint anguli ad verticem E. in triangulis IEK. MEL. & anguli KIE. LME. ei- 27. 3. dem arcui KL. item anguli MLE. IKE. eidem arcui IM. insistentes; itemque æqualia latera IE. EM. vt modo proba- 26. 1. tum est, æqualia erunt & latera KE. EL. Iam vero cum sit vt IG. ad IE. ita GK. ad EK. ex Corollario 1. præcedentis Coroll. 1. 36. huius. propositionis, erit permutando vt IG. ad GK. ita IE. ad EK. id est ad EL. quæ ipsi EK. probata est æqualis.

Sit denique punctum assumptum in diametro, vt in B. vel F. ac primo in B. Constat ex Coroll. 2. 25. huius esse vt BG. Coroll. 2. 25.3.huius. ad GF. ita BE. ad EF. Quod si punctum assumptum sit in F. manifestum est, pe rationem identitatis esse vt FG. ad GF. ita FE. ad EF. Quod erat &c.

THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XXXVIII.

Isdem positis: si circa EG. circulus describatur secans citculum FAB. in I. & ducantur IG. IF. IE. IB. Dico tres angulos GIF. FIE. EIB. esse inter se, ac singulos æquales semirecto.

Rur-

Rectus enim eſt vterque angulorum BIF. GIE. in ſemicirculo: æqualis item eſt GIF. angulo FIE. ex 36. huius; vterque igitur ſemirectus eſt, ergo & ſemirectus reliquus EIB. anguli recti FIB. Igitur æ-æquales ac ſemirecti ſunt tres anguli GIF. FIE. EIB. Quod erat propoſitum.

31. 3.
Coroll. 1.
36. 3. huius.



THEOREMA XXXIX. PROPOS. XXXIX.

QVadratum tangentis arcus quadrante minoris, ad quadratum ſinus totius rationem habet quam rectangulum ſub aggregato ſinus totius & ſecantis, & ſub aggregato differentiæ ſecantis & dupli ſinus verſi, ad rectangulum ſub aggregato ſinus totius & dupli ſinus complementi, & ſub ſinu toto.

SINT eadem quæ ſuperiori propoſitione. Sed ipſi ED. nimirum ſinui complementi arcus AF. æqualis ſumatur EM. verſus G. & ſinui verſo EF. æqualis EN. verſus D. erit GN. aggregatum ex differentia ſecantis GF. & duplo ſinus verſi FE. EN. & MN. aggregatum ex ſinus complementi ME. id eſt ED. & ſinu verſo EF. ideoque MN. æqualis ſinui toto DF. & BG. aggregatum ex ſinu toto BD. &



secante DG. Denique BM. aggregatum ex BD. sinu toto & DE. EM. duplo sinus complementi. Dico esse vt quadratum GA. ad quadratnm AD. ita rectaugulum BGN. ad rectangulum BMN. Quoniam rectangulum GED. est æquale quadrato AE. & rectangulum BEF. eidem quadrato AE. æqualia erunt rectangula GED. BEF. vt in progressu. 22. huius demonstratum est, id est rectangula GEM. BEN. ergo vt BE. ad EG. ita ME. ad EN. & sumptis antecedentibus, simul & consequentibus simul, vt tota BM. ad totam GN. ita ME. ad EN. & conuertendo vt GN. ad BM. ita EN. ad ME. Rursus quoniam rectangulum BEN. rectangulo GEM. æquale est, erit vt BE. ad EM. ita GE. ad EN. & sumptis antecedentibus simul, & consequentibus simul, vt tota BG. ad totam NM. ita GE. ad EN. erat autem vt GN. ad BM. ita EN. ad ME. Quare proportio composita ex rationibus BG. ad NM. & GN. ad BM. eadem est ei quæ componitur ex rationibus GE. ad EN. & EN. ad ME. Igitur ex 3. huius vt GE. ad

8. & 17. 6.

14. 6.

22. 5.

14. 6.

12. 1.

3. 3. huius.

BG.	NM.	GE.	EN.
GN.	BM.	EN.	ME.

ME. ita rectangulum BGN. ad rectangulum BMN. Sed vt GE. ad ME. ita GE. ad ED. (cum positæ sint æquales EM. ED) & vt GE. ad ED. ita quadratum GA. ad quadratum AD. (nam quadrato AG. æquale est rectangulum DGE. & quadrato AD. rectangulum GDE. & posita communi basi DG. rectangula DGE; GDE. sunt vt altitudines GE. ED. Quare etiam Quadrata AG. AD. sunt vt GE. ED.) Igitur vt Quadratum AG. ad quadratum AD. ita rectangulum BGN. ad rectangulum BMN. Quod erat propositum.

8. & 17. 6.

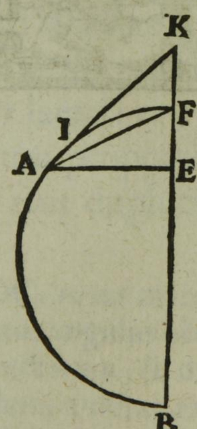
2. 6.

THEO-

THEOREMA XL. PROPOS. XL.

SI à puncto in quo diameter peripheriam circuli secat in ipsa diametro æquales partes sumantur altera extra circulum, altera intra; & à puncto extra circulum in peripheriam tangens, à puncto intra sinus ducatur arcum secans; Quadrata tangentis, & sinus posterioris arcus simul sumpta sunt dupla quadrati chordæ eiusdem arcus.

Circulum FAB. secet diameter in F. puncto, à quo æquales sumantur FE. FK. illa intra, hæc extra circulum, & tangat KI. circulum in I. & EA. perpendicularis ad BF. seu sinus arcus FA. secet circulum in A. & ducatur chorda AF. Dico quadrata HI. & AE. simul esse dupla quadrati AF. Æquale enim est quadratum KI. rectangulo BGF. & quadratum FA. rectangulo BFE. & quadratum EA. rectangulo BEF. rectangulorum autẽ BKF.BFE. BEF. æqualis est altitudo FK. FE. FE. ex hypothesi, sunt igitur inter se vt bases BK. BF. BE. quare etiam quadrata KI. FA. EA. ordine sunt vt rectæ BK. BF. BE. Sed rectæ BK. BF. BA. sunt in proportionalitate Arithmetica, cum æquales sint earum



36. 3.
8.& 17. 6.
8.& 17. 6.
1. 6.

diffe-

8.3.huius. differentiæ EF. FK. Igitur etiam, ex 8.3. huius quadrata KI. FA. EA. sunt in proportionalitate Arithmetica, quare quadrata KI. EA. simul sumpta sunt dupla quadrati FA. vt in Schol. proposit. 7.3. huius probatum est.

7.3.huius. Schol. pro-posit. 2.

FINIS LIBRI III.

CVRVI

CVRVI AC RECTI
Proportio promota.

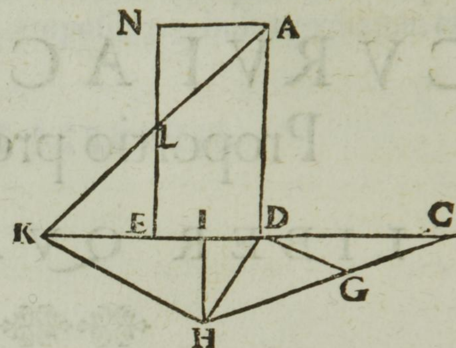
LIBER QVARTVS.

THEOREMA I. PROPOS. I.

SI trianguli amblygonij angulum obtuſum duas tertias duorum rectorum continentem recta ſecans faciat cum minori latere angulum rectum, & ex baſi auferat partem æqualem minori lateri: erit maius latus maior duarum mediarum proportionalium, quæ inter minus latns & eius duplum ſumi poſſunt.

SIT triangulum amblygorium HDC. cuius maius latus DC. minus DH. quibus contentus angulus obtuſus HDC. contineat duas tertias duorum rectorum, & ducta ex D. recta DG. ad HD. perpendicularis auferat ex baſi HC. rectam GC. æqualem rectæ DH. Dico latus DC. eſſe maiorem duarum mediarum proportionalium quæ inter latus DH. & eius duplum duci poſſunt. Producatur CD. quamtumlibet in K. & ducta ex D. ad CD. perpendiculari DA. quæ ſit dupla ipſius DH. Item DE. æquali ipſi DH. id

eſt



eſt medietati ipſius DA. compleatur parallelogrã DANE. diuiſoque latere EN. bifariam in L. ducta ALK. ſecet CD. productam in K. & connectatur KH. Denique ex H. ad CH. perpendicularis ducatur HI. Cum angulus HDC. ſit duæ tertiæ duorum rectorũ, erit reliquus HDI. vna tertia duorum rectorũ, id eſt duæ tertiæ vnius recti. ideoque HD. id eſt DE. dupla ipſius DI. Itemque cum angulus HDC. ſit duæ tertiæ duorum rectorum id eſt quatuor tertiæ vnius recti, dempto HDG. recto id eſt tribus tertijs vnius recti remanet GDC. vna tertia vnius recti. Rurſus cum in triangulus KEL. ALN anguli ad E. N. ſint recti, item anguli ad verticem L. & latera adiacentia EL. LN. ſint æqualia, æqualia erunt latera KE. NA. id eſt KE. ED. eſt igitur KD. dupla ipſius ED. id eſt ipſius DH. quæ poſita eſt ipſi ED. æqualis. Cum ergo ſit etiam HD. dupla ipſius DI. erit vt KD. ad DH. ita HD. ad DI. æquiangula igitur ſunt triangula KDH. HDI. angulus igitur DHK. rectus eſt, æqualis nempe angulo HID. & angulus HKD. æqualis angulo IHD. eſt vna tertia recti, ideoque æqualis angulo GDC. qui oſtenſus eſt vna tertia recti: parallelæ igitur ſunt KH. DG. Quare ex ijs quæ demonſtrara ſunt à Nicomede apud Pappum Alexandrinum lib. 3. collectionum mathematicarum prop. 5. & Eutocium in 2. de ſphera & cylindro Archimedis patet latus maius DC. eſſe maiorem ex duabus medijs proportionalibus poſitis inter DH. minus latus, & rectam DA. duplam lateris DH. Quod erat demonſtrandum.

13. 1.

26. 1.

38. 1.

6. 6.

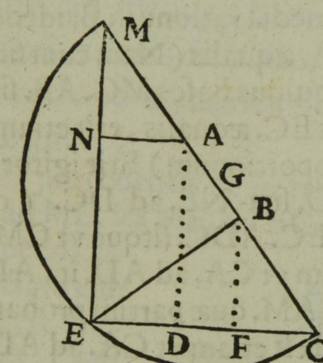
28. 1.

THEO-

PROBLEMA I. PROPOS. II.

TRiangulum rectangulum constituere, ac parallela ad minus latus ita secare vt quatuor segmenta sint in continua ratione.

Ducatur recta MC. vtcumque, quæ diuidatur in B. extrema ac media ratione: eademque diuisa bifariam in G. describatur semicirculus MEC. ad quem ducatur ex B. perpendicularis BE. secans semicirculum in E. & connectantur ME. CE. ipsique BC. accipiatur æqualis MA. & ex A. ad ME. ducatur perpendicularis AN. Dico factum esse quod proponebatur; nempe triangulũ MEC. rectangulum ad E. ita diuisum recta NA. parallela ad EC. (quod minus esse latus mox ostendemus) vt sit velut AC. ad NE. ita NE. ad AM. & AM. ad MN. Ducantur ad EC. perpendiculares AD. BF. Quoniam est vt CM. ad MB. ita MB. ad BC. erit MB. media proportionalis inter CM. BC. sed etiam CE. est media proportionalis inter CM. BC. æquales igitur sunt CE. MB. Quare vt EM. ad MB. ita EM. ad EC. sed vt EM. ad MB. ita CM. ad ME. vt igitur CM. ad ME. ita ME. ad EC. maior autem est basis CM. latere ME. igitur etiam maius est latus ME. latere EC. Rursus quoniam acceptæ sunt æquales MA. BC. addita communi AB. erunt MB. AC. æquales, æqualis autem est MB. ipsi EC. vt modo probatum est: igitur etiam æqualis est AC. ipsi EC. Et MC. etiã in A. secta est extrema ac media ratione, cum sit vt CM. ad MA. ita CM. ad CB. quæ quidem CB. minus est segmentum ex hypothesi. Cum vero in triangulis MNA. BFC. rectangulis ad N. & F. & æquiangulis ob parallelas NA. EC. æqua



31. 3.
defin. 3. 6.
8. 6.
9. 5.
7. 5.
8. 6.
19. 1.
14. 5.
7. 5

26. 1. les ſint baſes BC. MA. ex hypotheſi, æqualia erunt latera FC. NA. & BF. MN. inter ſe. Iterum quoniam recta MC. ſecta eſt extrema ac media ratione in B. & A. erit tam MB. quam AC. maius ſegmentum, & tam MA. quam BC. minus: detracto igitur MA. ex MB. remanebit maius ſegmentum MB. ſectum extrema ac media ratione in A. eritque AB. minus, MA. maius ſegmentum. Quare cum æquales ſint BC. BA. ipſis MA. AB. etiam AC. ſecta erit extrema ac media ratione in B. Igitur in triangulo rectangulo ADC. ipſi MEC. ſimili ſimiliterque poſito baſis AC. ſecta eſt extrema ac media ratione in B. ideoque erit DC. ipſi BC. id eſt ipſi MA. æqualis (Nam cum ſimilia ſint triangula ADC. MEC. in quibus baſes MC. AB. ſimiliter ſectæ in A. B. ſitque AC. ipſi EC. æqualis, erit etiam BC. ipſi CD. æqualis ex regulis proportionum) Erit igitur vt CA. ad AD. ſeu ad NE. ita AD. ſeu NE. ad DC. (cum enim ſimilia ſint triangula MEC. ADC. ſitque vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. erit etiam vt CA. ad AD. ita AD. ad DC.) nempe ad CB. id eſt ad AM. quæ partim probatæ, partim ſumptæ ſunt æquales: ſed eſt etiam vt CA. ad AD. ita AM. ad MN. ergo vt EN. ad AM. ita AM. ad MN. probatum igitur eſt eſſe vt CA. ad NE. ita NE. ad AM. & AM. ad MN. Quare triangulum rectangulum conſtitutum eſt &c. Quod erat faciendum.

(Margin: Schol. 5. 13. — 34. 1. — 4. 6. — 11. 5.)

COROLLARIVM. I.

Hinc manifeſtum eſt, ſi recta diuidatur extrema ac media ratione, ſuper qua conſtituatur triangulum rectangulum à cuius angulo recto perpendicularis ad baſim incidat in ſectionem, eſſe vt baſim ad maius, ita maius latus ad minus. Probatum enim eſt in propoſitione, in qua hæc effecta ſunt, eſſe vt CM. ad ME. ita ME. ad EC.

COROL-

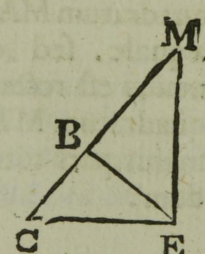
COROLLARIVM. II.

Constat etiam ijsdem positis maius segmentum basis, minori lateri esse æquale. Demonstratum namque est segmentum MB. lateri EC. esse æquale.

THEOREMA II. PROPOS. III.

SI in triangulo rectangulo sit vt basis ad maius latus, ita maius latus ad minus; demissa ex angulo recto perpendicularis in basim secat eam extrema ac media ratione & maius segmentum minori lateri est æquale.

Repetatur figura propositionis præcedentis ac in triangulo rectangulo ad E. sit vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. sitque EB. ex angulo recto E. perpendicularis ad basim MC. Dico MC. sectam esse in B. extrema ac media ratione, & segmentum MB. lateri EC. esse æquale. Cum enim sit ME. ad EC. vt CM. ad ME. ex hypothesi, & vt CM. ad ME. ita ME. ad MB. erit vt ME. ad EC. ita ME. ad MB. æquales igitur sunt EC. & MB. quod secundo proponebatur. Rursus quoniam æquales sunt EC. MB. erit vt MC. ad CE. ita MC. ad MB. sed vt MC. ad CE. ita EC. id est MB. ad BC. vt igitur MC. ad MB. ita MB. ad BC. Quod primo propositum fuerat.



8. 6.
9. 5.
7. 5.
8. 6.

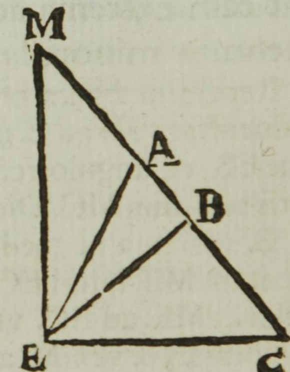
THEOREMA III. PROPOS. IV.

SI in triangulo rectangulo tria latera sint continue proportionalia, basisque secetur extre-

ma ac media ratione, sitque maius segmentum maiori lateri contiguum recta: ex angulo recto in sectionem demissa est ad basim perpendicularis.

SIT in triangulo rectangulo ad E. vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. & diuisa MC. in B. extrema ac media ratione ducatur EB. & sit MB. maius segmentum maiori lateri ME. contiguum. Dico EB. ad MC. esse perpendicularem. Si enim non, sit quæpiam alia EA. perpendicularis ad basim MC. erit ex præcedenti CM. secta in alio puncto vt in A. extrema ac media ratione, sed etiam secta est in B. extrema ac media ratione, ergo vt CM. ad MB. ita MB. ad BC. estque quadratum MB. rectangulo MCB. æquale eodem modo erit quadratum MA. rectangulo MCA. æquale, sed rectangulum MCA. maius est rectangulo MCB. ergo quadratum MA. quadrato MB. erit maius, pars toto. Quod est absurdum.

3. huius. *3. defin. 6.* *17. 6.*



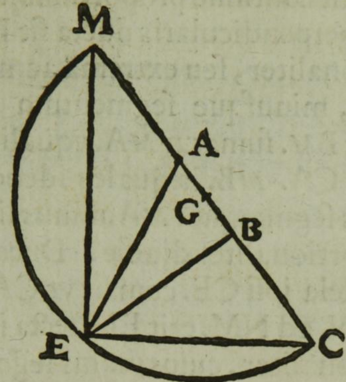
PROBLEMA II. PROPOS. V.

TRiangulum rectangulum constituere cuius tria latera, & basis ab angulo recto ad basim sint continue proportionalia.

Ducatur recta MC. vtcumque quæ diuidatur in B. extrema ac media ratione; eadem bifariam diuisa in G. describatur semicirculus MEC. ad quem ducatur ex B. perpendicularis BE. & connectantur ME. EC. Dico factum esse quod

THEO-

proponebatur, nempe esse vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. & EC. ad EB. Ac primo quidem esse vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. patet ex Corollario primo præcedentis. Quod vero sit vt ME. ad EC. ita EC. ad EB. probatur, est enim vt ME. ad EC. ita CM. ad ME. ex dicto Corollario, sed vt CM. ad *ME*. ita CE. ad EB. ergo vt *M*E. ad EC; ita EC. ad EB. Igitur triangulum rectangulum constituimus, &c. Quod erat faciendum.



Coroll. 1. 2. 4. huius.

8. 6.

COROLLARIVM.

MAnifestum etiam est in eodem triangulo minus segmentum BC. esse quatuor rectis CM. ME. EC. EB. quinto loco proportionale: Cum enim triangulum EBC. triangulo CME. sit simile, sitque vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. erit etiam vt CE. ad EB. ita EB. ad BC.

8. 6.

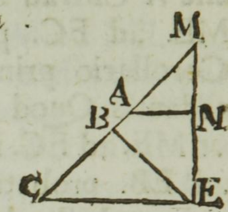
THEOREMA IV. PROPOS. VI.

SI trianguli rectanguli cuius tria latera sunt continue proportionalia latus maius proportionaliter sectum fuerit: erit maius segmentum perpendiculari ab angulo recto ad basim ductæ æquale.

Trian-

Trianguli MEC. rectanguli ad E. tria latera CM. ME. EC. sint continue proportionalia, a cuius angulo E. in basim CM. perpendicularis ducta sit EB. erit CM. in B. secta proportionaliter, seu extrema ac media ratione, minusque segmentum erit CB. maius BM. sumatur MA. æqualis ipsi CB. erunt CA. MB. æquales ideoque AC. maius segmentum MA. minus lineæ MC. proportionaliter diuisæ. Ducatur AN. parallela ipsi CE. cum sit vt CA. ad AM. ita EN. ad NM. erit EM. secta in N. proportionaliter, cuius maius segmentum EN. minus NM. Dico EN. esse æqualem ipsi EB. Nam vt ME. ad EB. ita MC. ad CE. & vt MC. ad CE. ita MC. ad MB. (æquales enim sunt EC. MB. ex Scholio 2. 4. huius) & MC. ad AC. (nam æquales ostensæ sunt AC. MB.) & vt MC. ad AC. ita ME. ad EN. ergo à primo ad vltimum vt ME. ad EB. ita ME. ad EN. æquales igitur sunt EB. EN. Quod erat demonstrandum.

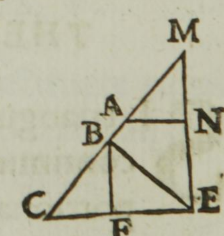
Coroll. 1. 2. 4. huius. — 2. 14. — 8. 6. — 3. 4. huius. — 4. 6. — 9. 5.



COROLLARIVM.

Ex dictis facile demonstrari potest rectas etiam NA. AB. esse æquales. Ducta enim ad EC. perpendiculari BF. cum duo triangula CEM. EBC. similia sint, & similiter secta in F. B. sitque MB. æqualis ipsi EC. erit EF. æqualis ipsi BC. si igitur ex æqualibus EC. CA. auferantur æquales EF. CB. remanent æquales FC. AB. sed ipsi FC. est æqualis NA. (nam in triangulis æquiangulis BFC. MNA. etiam latera MA. BC. sunt æqualia ideoque & reliqua NA. FC.) æquales igitur sunt AB. AN.

8. 6. — 26. 1.

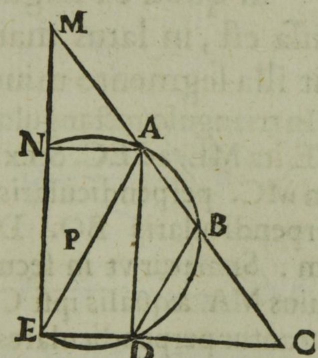


THEO-

THEOREMA V. PROPOS. VII.

SI intra triangulum rectangulum rectæ ab eodem puncto basis ad vtrumque latus perpendiculares ducantur, circa quas descriptus circulus in basi æqualem minori perpendicularium interius compræhendat, exterius duas partes æquales rlinquat: secabitur basis à circnlo extrema ac media ratione, eruntque tria latera trianguli in continua ratione.

Intra triangulum rectangulum MEC. à puncto basis A. ducantur duæ AN. AD. perpendiculares; illa ad maius latus ME. ista ad minus EC. & descriptus circulus NAB. centro P. circa parallelogrammum NADE. abscindat ex basi MC. interius rectam AB. æqualem ipsi AN. & rectæ AM. BC. sint æquales. Dico basim MC. sectam esse, tam in A. quam in B. extrema ac media ratione: Itẽque esse vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Connectantur BD. AE. Quoniã æquales sunt NA. ED. item NA. AB. ex hypothesi, æquales erunt ED. AB. parallelæ igitur sunt AE. BD. (Nam cum æquales sint arcus ED. AB. addito communi BD. æquales erunt arcus EB. AD. ideoque æquales anguli AED. EAB. & eodem modo anguli EDB. ABD. probantur æquales, sunt autem anguli AED. ABD. æquales duobus rectis, igitur AED. EDB. sunt æquales duobus rectis, ac propterea AE. BD. parallelæ) igitur vt AB. ad AC. ita ED. ad EC. æquales igitur sunt AC. EC.



34. 1.
28. 3.
27. 3.
22. 3.
28. 1.
2. 6.
9. 5.

ſed ipſi CA. eſt æqualis BM; (cum enim poſitæ ſint æquales MA. BC. addita communi BA. erunt æquales CA. BM.) æquales igitur ſunt CE. MB. Rurſum cum ſemicirculus ſit ADE. continens angulum rectum EDA. erit etiam ABE. angulus rectus. Quare cum latus minus EC. ſic æquale maiori ſegmento MB. erit, ex demonſtratis in ſuperioribus propoſitionibus CM. ſecta in B. aut A. extrema ac media ratione, ideoque etiam ex dictis erit vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Quod fuit demonſtrandum.

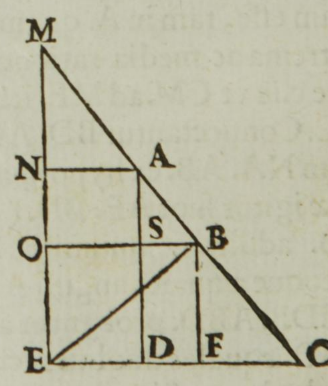
Schol. 31. 3.
31. 3.
Schol. 2. 4. huius.
Coroll. 2. 2. 4. huius.

THEOREMA VI. PROPOS. VIII.

SI in triangulo rectangulo cuius tria latera ſunt continue proportionalia à puncto baſis in quod ex angulo recto perpendicularis demiſſa eſt, in latus maius perpendicularis ducatur erit illa ſegmento minori baſis æqualis.

In triangulo rectangulo MEC. ſit vt baſis CM. ad latus ME. ita ME. ad EC. & ex angulo MEC. ducatur EB. ad baſim MC. perpendicularis, & ex B. ad latus maius ME. perpendicularis BO. Dico BO. ipſi BC. eſſe æqualem. Sumatur vt in ſecunda huius MA. æqualis ipſi CB. & ducantur perpendiculares AN. ad ME. & AD. ad EC. ſecans OB. in S. Item ducatur perpendicularis BF. ad EC. Cum OS. NA. ſint æquales itemque NA. & FC. vt 2. huius oſtendimus erunt OS. FC. æquales, additis igitur æqualibus æquales erunt OB. DC. at vero æqualis eſt DC. ipſi BC. vt 2. & tertia huius oſtenſum eſt, æquales igitur ſunt OB. BC. Quod erat demonſtrandum.

34. 1.

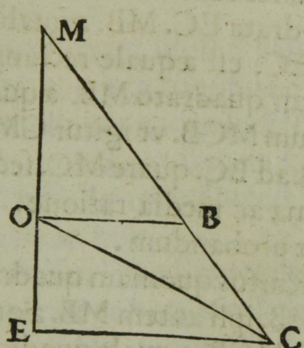


THEO-

THEOREMA VII. PROPOS. IX.

SI angulum obliquum maiorem in triangulo rectangulo cuius latera continue proportionalia diuidens recta ſecet oppoſitum latus extrema ac media ratione, ſecabit dictum angulum bifariam : & ſi ſecet bifariam ſecabit extrema ac media ratione.

SIT rurſus triangulum MEC. in quo vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. & recta CO. diuidens angulum maiorem MCE. ſecet oppoſitum latus ME. in O. extrema ac media ratione, ita vt OM. ſit maius ſegmentum OE. minus. Dico angulum ECO. eſſe æqualem angulo OCM. Ducatur OB. parallela ipſi EC. erit vt MO. ad OE. ita MB. ad BC. ſecta eſt autem ME. in O. extrema ac media ratione; igitur etiam MC. in B. eodem modo ſecta eſt, æqualis igitur eſt EC. ipſi MB. ex 3. huius. Vt igitur MC. ad CE. ita MC. ad MB. id eſt EM. ad MO. id eſt MO. ad OE. æqualis igitur eſt angulus ECO. angulo OCM. Quod prius erat oſtendendum.



2. 6.

2. 14.
3. huius.
7. 5.
4. 6.
defin. 3. 6.
3. 6.

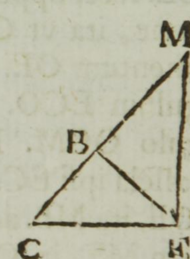
Sed rurſus in triãgulo prædicto ſectus ſit angulus ECM. recta CO. bifariam. Dico rectam EM. ſectam eſſe in O. extrema ac media ratione. Nam quoniam angulus ECM. ſectus eſt bifariam erit vt MC. ad CE. id eſt vt CM. ad MB. ita MO. ad OE. ſed vt MO. ad OE. ita MB. ad BC. ergo vt CM. ad MB. ita MO. ad OE. ſed vt CM. ad MB. ita EM. ad MO. Igitur vt MO. ad OE. ita EM. ad MO. Igitur ſecta eſt MC. in O. extrema &c. Quod erat &c.

3. 6.
3. huius.
3. 6.
4. 6.

THEOREMA VIII. PROPOS. X.

SI in triangulo rectangulo perpendicularis ex angulo recto in basim demissa auferat segmentum æquale minori lateri: erit basis secta extrema ac media ratione, & tria latera continue proportionalia.

IN triangulo rectangulo MEC. perpendicularis EB. ex angulo recto E. ad basim MC. ducta auferat segmentum MB. æquale minori lateri EC. Dico MC. esse sectam in B. extrema ac media ratione;& esse vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Nam quoniam æquales sunt EC.MB.ex hypothesi erunt quadrata EC. MB. æqualia,sed quadrato EC. est æquale rectangulum MCB. (8.& 17. 6.) Igitur quadrato MB. æquale est rectangulum MCB. vt igitur CM. ad MB. ita MB. ad BC. (17. 6.) quare MC. secta est in B. extrema ac media ratione. (3. defin. 6.) Quod primo erat probandum.



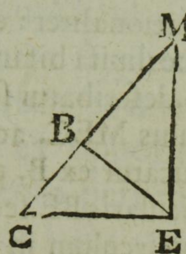
Rursus quoniam quadratum EM. est æquale rectangulo CMB. (8.& 17. 6.) ipsi autem MB. æqualis ponitur EC. erit rectangulum MCB. æquale quadrato ME. (17. 6.) Igitur vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Quod secundo efficiendum erat.

THEOREMA IX. PROPOS. XI.

SI in triangulo inæqualium laterum, continue proportionalium ex angulo in oppositum latus recta ducatur illud secans extrema ac media ratione, ita vt maius segmentum maiori lateri adhærens sit æquale minori laterum: anguli

li tam ex quo recta ducta est, quam quos cum latere occurente facit, recti sunt.

Sit triangulum MEC. inæqualium laterum, ita vt sit sicut CM. ad ME. ita ME. ad EC. & ex angulo E. ducta EB. in latus MC. illud secet in B. media & extrema ratione, sitque segmentum contiguum lateri ME. æquale lateri EC. Dico angulos MEC. EBC. esse rectos. Nam quoniam recta MC. secta est in B. extrema ac media ratione, ex hypothesi, erit rectangulum MCB. quadrato MB. id est quadrato EC. (ponuntur enim æquales MB. EC.) æquale. Rursus quia ex suppositione est vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. erit quadratum ME. rectangulo MCE. id est CMB. æquale. Quare duo rectangula MCB. CMB. duobus quadratis CE. EM. æqualia sunt, at duobus rectangulis MCB. CMB. æquale est quadratum CM. Igitur quadratum CM. æquale est duobus quadratis CE. EM. Igitur rectus est angulus MEC. Quod primo probandum fuit.



defin. 3. & 17. 6.

17. 6.

2. 2.

48. 1.

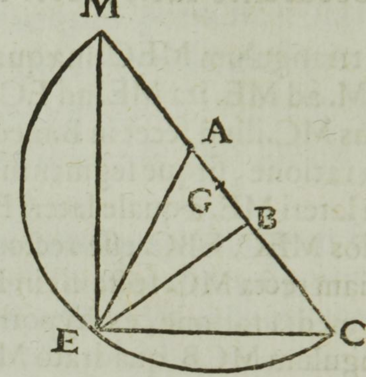
Sed dico etiam EBC. esse rectum; seu EB. esse perpendicularem ad MC. Nam cum in triangulo rectangulo MEC. ex angulo recto MEC. ducta sit EB. ad MC. secans illud extrema ac media ratione, sintque tria latera CM. ME. EC. continue proportionalia erit EB. ad MC. perpendicularis. Quod secundo demonstratione comprobandum erat.

4. huius.

PROBLEMA III. PROPOS. XII.

TRiangulum Isosceles describere ex cuius angulis ad opposita latera æqualia ductæ perpendiculares ea secent proportionaliter.

Ducatur recta MC. vtcumque quæ diuidatur in B. extrema ac media ratione, seu (quod idem est, vt a multis vsurpatur) proportionaliter: eademque diuisa bifariam in G. describatur semicirculus MEC. ad quem ducatur ex B. perpendicularis BE. secans semicirculum in E. & connectatur ME. CE.



ipsique BC. accipiatur æqualis MA. atque connectatur EA. Dico triangulum ACE. esse Isosceles, cuius latera EC. AC. sunt æqualia, & latus AC. perpendiculari EB. sectum est proportionaliter. Quoniam æquales sunt positæ BC. MA. addita communi AB. æquales erunt MB. AC. ipsi autem MB. est æqualis EC. Igitur etiam ipsi AC. est æqualis EC. Triangulum ergo Isosceles est ACE. sed MB. est maius segmentum lineæ MC. proportionaliter sectæ: igitur etiam AC. est maius segmentum lineæ MC. proportionaliter sectæ, sed BC. est minus segmentum: ergo CA. secta est extrema ac media ratione, seu proportionaliter in B. cuius maius segmentum BC. minus BA. Quare triangulum Isosceles descripsimus &c. Quod erat faciendum.

3. huius.

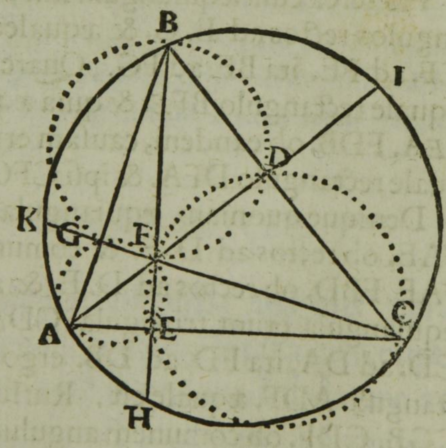
Schol. 5. 10.

THEO-

THEOREMA X. PROPOS. XIII.

SI in triangulo oxygonio ex ſingulis angulis ad latera oppoſita perpendiculares ducantur: rectangula ſub lateribus aut perpendicularibus ac ſegmentis in idem anguli punctum deſinentibus. item ſub perpendicularium ſegmentis contenta: denique ea quæ ſub laterum ſegmentis & ijs quæ ſub perpendicularibus ex oppoſito angulo in latus cadentibus, & ſegmento perpendicularis inter punctum concurſus, & latus contento comprehenduntur rectangula æqualia ſunt.

SIT triangulum oxygonium ABC. ex cuius ſingulis angulis demittãtur ad oppoſita latera perpendiculares AD. BE. CG. quæ quidem omnes ſeſe interſecabunt in vno puncto F. vt primo à Pappo Alexandrino demonſtratum eſt lib. 7. collect. Mathemat. propoſit. 60. hinc fuſius à Io: Camillo Glorioſo, exercit. 2. Theor. 4. Dico rectangula ABG. CBD. EBF. lateribus AB. CB. perpendiculari que EB. ac ſegmentis GB. DB. FB. in idem anguli punctum B. deſinentibus contenta inter ſe eſſe æqualia: item rectangula BAG. CAE. DAF. ijſdem lateribus ac ſegmentis GA. EA. FA. in punctum A. deſinentibus comprehenſa, ad hæc rectangula BCD. GCF. ACE. in punctum. C. deſinentia



nentia inter ſe eſſe æqualia: Inſuper rectangula BFE. DFA. CFG. quæ ſegmenta perpendicularium continent, itidem inter ſe eſſe æqualia. Denique rectangulum CDB. rectangulo ADF. & BGA. ipſi CGF. & AEC. ipſi BEF. eſſe æquale. Nam quoniam in quadrilatero AGFE. anguli oppoſiti [Schol. 22. 3.] G. E. ſunt recti, erit ipſum in circulo: atque eandem ob cauſam quadrilatera BGFD. DFEC. erunt in circulo. Circumſcribantur igitur illis circuli AGFE. BGFD. DFEC. tranſibunt primus & ſecundus per eadem puncta G. F. ſecundus & tertius per eadem puncta F. D. primus & tertius per eadem F. E. Quare cum lineæ AC. GC. ſecent eundem circulum AGFE erunt rectangula ACE. GCF. æqualia [Coroll. 1. 36. 3.] Item quia rectæ GC. BC. ſecant eundem circulum GBDF. in punctis F. D. erunt rectangula ſub GCF. BCD. inter ſe æqualia: quare & æqualia erunt rectangula ACE. BCD. [axiom. 1.]

Eodem modo oſtendemus BAG. DAF. CAE. inter ſe, item CBD. EBF. ABG. rectangula eſſe æqualia.

[32. 1. 4. 6.] Præterea cum æquiangula ſint triangula CFE. BFG. ob angulos rectos ad E. G. & æquales ad vertitem F. erit vt CF. ad FE. ita BF. ad FG. Quare rectangulum CFG. erit [16. 6.] æquale rectangulo BFE. & quia æquiangula ſunt triangula FEA. FDB. ob eandem, cauſam erit rectangulum BFE. æquale rectangulo DFA. & ipſi CFG. [1. pron.]

[32. 1.] Denique quoniam æquiangula ſunt triangula DAC. FAE. ob rectos ad D. E. & comunem A. item triangula FAE. FBD. ob rectos ad D. E. & æquales ad verticem F. æquiangula erunt triangula CDA. FDB. Quare erit vt [4. 6. 16. 6.] CD. ad DA. ita FD. ad DB. ergo rectangulum CDB. rectangulo ADF. æquale eſt. Rurſus quia ſunt æquiangula CGB. CDF. ob comunem angulum ad C. & rectos ad D. G. item triangula FDC. GFA. ob rectos ad D. G. & æquales ad verticem F. etiam æquiangula erunt triangula CGB. GFA. ideoque erit vt CG. ad BG. ita AG. ad GF. ergo rectangula CGF. BGA. ſunt æqualia. Tandem eodem modo ex eo quod triangula CEB. EAF. ſint æquiangula inter

ſe

ſegnia æquiangula tertio ADC. oſtendemus rectangulum CEA. eſſe æquale rectangulo BEF.

SCHOLIVM.

Hic habes quatuor coniugationes vbi terna inter ſe, & vnam vbi terna ternis rectangula æqualia ſunt; quam propoſitionem non tantum triangulo æquicruri aptauimus, vt Pappus lib. 5. Coll: Math: Theor. 1. ad propoſitionem 25. ſed etiam ſcaleno tam acutangulo, quam obtuſangulo; nec vnum tantum caſum, quod ille, ſed ad octodecim demonſtratione haud admodum longiore, certe multo faciliore complexi ſumus. Quod ſi in ſuperiori figura triangulum ABC. circulo comprehendamus, ac perpendiculares AD. BE. CG. in circumferentiam vſque producamus in puncta I. H. K. erunt earum partes extra triangulum, partibus intra triangulum latere ac puncto concurſus definitæ æquales; nempe DI. ipſi DF. HE. ipſi EF. & KG. ipſi GF. nam rectangulo CDB. oſtenſum eſt æquale rectangulum ADF. & eidem rectangulo CDB. æquale erit rectangulum ADI. æqualia igitur ſunt rectangula ADF. ADI. atque adeo æquales DF. DI. atque eodem modo probabitur æquales eſſe reliquas.

16. 6.
Schol. 1. 6.

THEOREMA XI. PROPOS. XIV.

SI ex trianguli Iſoſcelis ſingulis angulis perpendiculares ſecent oppoſita latera extrema ac media ratione; rectangulum ſub latere ac maiori ſegmento, æquale eſt quadtato perpendicularis in latus cadentis.

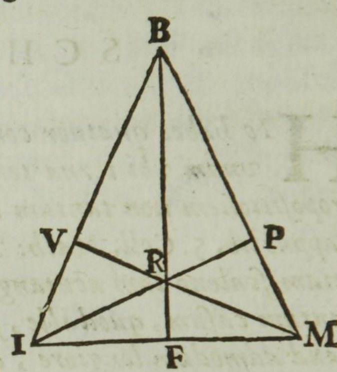
SIT triangulum Iſoſceles IBM. cuius latera IB. MB. æqualia, ex cuius angulis emittantur ad oppoſita latera perpendiculares IP. MV. & ad baſim ipſam perpendicularis BF. (quæ tranſibunt omnes per vnum punctum R. vt ſupra

Pappus lib. 7. Pro. 60. 13. huius.

pra probatum est) secentur autem latera in punctis V. P. extrema ac media ratione sintq; segmenta maiora BV. BP. minora VI. PM. Dico rectangulum IBV. Quadrato IP. esse æquale. Nam quadratum BI. æquale est rectangulis IBV. BIV. Item quadratis BP. PI. Igitur duo triangula IBV. BIV. æqualia sunt duobus quadratis BP. PI. Rectangulo autem BIV. æquale est quadratum BV. (nam cum diuisa sit BI. proportionaliter in V. cuius maius segmentum BV. erit vt IB. ad BV. ita BV. ad VI. ideoque rectangulum BIV. quadrato BV. æquale est) igitur rectangulum IBV. & quadratum BV. sunt æqualia quadratis BP. PI. Quadratum autem BV. est æquale quadrato BP. (nam cum æquales sint BI. BM. & æqualiter diuisæ, erunt BV. BP. æquales) si igitur ex æqualibus, rectangulo IBV. cum quadrato BV. & duobus quadratis BP. PI. æqualia demantur quadrata BV. BP. remanent æqualia rectangulum IBV. & quadratum PI. Quod erat ostendendum.

2. 2. 47. 1.

17. 6.

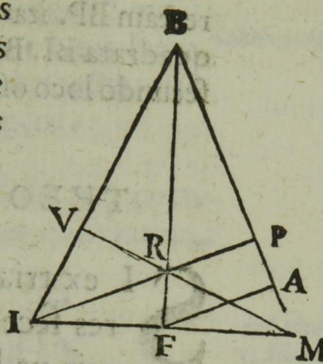


THEOREMA XV. PROPOS. XII.

SI ex trianguli Isoscelis angulis perpendiculares secent opposita latera proportionaliter: Quadrata lateris, perpendicularis ad basim; perpendicularis ad latus, erunt in proportionalitate Arithmetica, quorum differentia quadratum dimidiæ basis; & ordine eandem habebunt rationem, quam latus, composita ex maiori segmento cum dimidio minoris, & maius segmentum.

SIT

SIT triangulum æquicrure IBM. cuius latera æqualia IB. MB. basis IM. ex cuius angulis ad opposita latera, ad basim ductæ sint perpendiculares IP. MV. BF. secantes se in puncto R. ex dictis proposit. 13. huius, & latera in punctis V. P. ita vt rectæ IB. MB. sectæ sint proportionaliter in V. P. Sintq; BV. BP. maiora segmenta. VI. PM. minora, & PA. dimidium segmenti minoris. Dico quadrata rectarum BI. BF. IP. esse in proportionalitate Arithmetica, cuius excessus sit quadratum IF. Et esse, vt quadratum BI. ad quadratum BF. & quadratum BF. ad quadratum IP. ita latus MB. ad rectam AB. compositam ex AP. medietate segmenti minoris, cum PB. segmento maiori, & hanc ad maius segmentum BP.



Connectatur AF. Quoniam PM. ex hypothesi, diuisa est bifariam in A. & IM. bifariam in F. erit vt MA. ad AP. ita MF. ad FI. ideoque parallelæ erunt AF. PI. Rursus quadratum IB. excedit quadratum BF. quadrato IF. Cum vero quadratum BF. sit æquale duobus rectangulis FBR. BFR. sit autem rectangulum FBR. æquale rectangulo IBV. ex 13. huius, & rectangulum IBV. quadrato IP. vt supra proposit. 14. probatum est, excedet quadratum BF. quadratum IP. rectangulo BFR. idest quadrato IF. quod paulo ante probatum est esse æquale rectangulo BFR. Igitur Quadrata BI. BF. IP. sunt in proportionalitate Arithmetica, quorum differentia quadratum IF. Quod prius probandũ erat.

Schol. 26. 1.
2. 6.
47. 1.
2. 2.
13. huius.
14. huius.
13. huius.

Præterea cum æquiangula sint triangula IBF. FBA. ob angulos rectos ad FA. & æquales IBF. FBA. erit vt IB. ad BF. ita BF. ad BA. igitur est vt IB. idest MB. ad BA. ita quadratum IB. id est MB. ad quadratum BF. & conuertendo. Itẽ quoniã est, vt BI. ad IP. ita IP. ad PB. vt supra ostensum est, erit vt IB. seu MB. ad PB. ità quadratũ IB. seu MB. ad quadratum IP. Quare ex æqualitate, erit etiam vt recta AB. ad

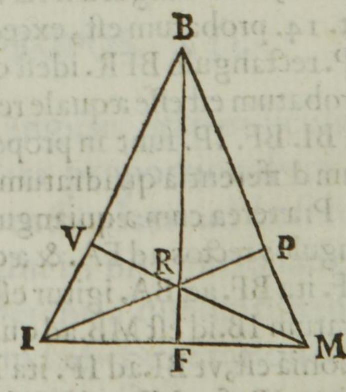
Schol. 26. 1.
Coroll. 20. 1.
2. huius.
Schol. 20. 6

rectam BP. ita quadratum BF. ad quadratum IP. Igitur quadrata BI. BF. IP. se habent vt rectæ MB. AB. PB. Quod secundo loco ostendendum erat.

THEOREMA XIII. PROPOS. XVI.

SI ex trianguli Isoscelis angulis perpendiculares secent opposita latera proportionaliter: erit vt latus Hexagoni ad latus decagoni, ita latus ad maius segmentum; vt vero latus quadrati ad latus Hexagoni, ità maius segmentum lateris, ad segmentum basis; & vt latus quadrati ad latus decagoni, ita latus ad segmentum basis; denique vt latus Hexagoni, ad latus quadrati, ita maius segmentum lateris ad totam basim.

SINT in eodem triangulo IBM. Isoscele ex angulis secta latera proportionaliter, modo sæpe superius inculcato. Dico esse vt latus Hexagoni ad latus Decagoni, ita IB. ad BV. & vt latus quadrati ad latus Hexagoni, ita BV. ad IF. & vt latus quadrati ad latus decagoni ità BI. ad IF. denique vt latus quadrati ad latus Hexagoni, ita IM. ad BV.

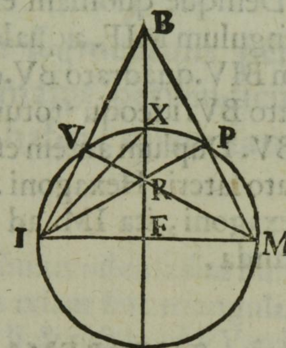


Ac primum quidem aio rectam IB. ad segmentum maius rationem habere quam latus Hexagoni ad latus Decagoni. Nam si componantur in vnam lineam rectam duæ IB. BV. tota recta secundum extre-

9. 13. mam

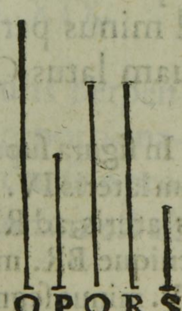
mam ac mediam rationem ſecabitur in B. eritque IB. maius ſegmentum, BV. minus; quare ſi IB. ponatur latus Hexagoni, erit BV. latus decagoni habebuntque hæ rectæ rationem, quam latus Hexagoni ad latus Decagoni. Schol. 9. 13.

Secundo, centro F. diſtantia FM. FI. deſcribatur circulus ſecans B. F. in X. & connectatur IX. Cum quadratum VB. ſit æquale rectangulo BIV. (vt 14. huius probatum eſt) & hoc rectangulo MIF. ex 13. huius, rectangulum autem MIF. duplum eſt quadrati IF. erit quadratum BV. duplum quadrati IF. eſt autem & IX. duplum quadrati IF. æqualia igitur ſunt quadrata, itemque latera VB. IX. ſed IX. in circulo MXI. eſt latus quadrati, IF. latus Hexagoni; Igitur vt IX. latus Quadrati, ad IF. latus Hexagoni, ita BV. ad IF.



14. huius.
13. huius.
1. 6.
Schol. 47. 1.
6. 4.
Coroll. 15. 4.

Tertio, Aſſumatur linea O. æqualis ipſi BI. & P. ipſi IF. & duæ Q. R. æquales ipſis BV. XI. fiatque vt O. ad P. ita Q. ſeu R. ad S. ſtatuaturque ipſa BI. ſeu O. ſemidiameter circuli, circa ipſam deſcripti, ſeu latus Hexagoni, & IF. ſeu P. ſemidiameter circuli MXI. & BV. ſeu Q. latus decagoni reſpectu ſemidiametri IB. quod paulo ante probatum eſt; & IX. ſeu R. latus quadrati in circulo MXI. Quoniam factum eſt vt O. ad P. ita Q. ad S. erit permutando, vt O. ad Q. ita P. ad S. ſed O. ad Q. rationem habet quam latus Hexagoni ad latus Decagoni, vt modo probatum eſt, igitur P. ad S. rationem habebit, quam latus Hexagoni ad latus



tus decagoni, eritque S. in circulo cuius ſemidiameter eſt IF. ſeu in circulo MXI. latus decagoni in quo etiam recta R. ſeu IX. eſt latus quadrati. Sed vt Q. ad S. ita R. ad S. cum æquales ſint Q. & R. habet autem R. ad S. rationem quam latus Quadrati ad latus decagoni, & vt R. ad S. ita poſita eſt O. ad P. ideſt BI. ad IF. igitur vt latus Quadrati ad latus Decagoni ita O. ad P. ſeu BI. ad IF.

13. huius. Denique quoniam ex ſuperioribus propoſitionibus re-
14. huius. ctangulum MIF. æquale eſt rectangulo BIV. & rectangulum BIV. quadrato BV. erit rectangulum MIF. æquale qua-
1. 6. drato BV. ideoque totum quadratum MI. duplum quadrati BV. Duplum autem eſt quadratum lateris quadrati, quadrato lateris Hexagoni. Igitur vt latus Quadrati ad latus Hexagoni, ita IM. ad BV. Quæ omnia fuerunt demonſtranda.

THEOREMA XIV. PROPOS. XVII.

Iiſdem poſitis Baſis ad minus ſegmentum lateris; item maius ſegmentum perpendicularis lateris ad minus perpendicularis baſis; denique maius ſegmentum perpendicularis baſis, ad minus perpendicularis lateris habent rationem quam latus Quadrati ad latus Decagoni.

In figura ſuperiori. Dico baſim MI. ad minus ſegmentum lateris IV. Item maius ſegmentum IR. perpendicularis lateris, ad RF. minus ſegmentum perpendicularis baſis: denique BR. maius ſegmentum perpendicularis baſis ad RV. minus ſegmentum perpendicularis lateris, rationem habere quam latus quadrati ad latus Decagoni. Similia ſunt triangula BIF. IMP. ob rectos ad F. & P. & æquales ad I. M. item triangula IMP. IRF. ob communem angulum

ad

ad I. & rectos ad FP. denique triangula IRF. BRP. ob æquales ad verticem R. & rectos ad P. F. vt igitur BI. latus quadrati ad IF. latus Decagoni (vt in propositione demonstratum est) ita IM. ad MP. & IR. ad RF. & BR. ad RP. Quod fuit probandum.

4. 6.

17. huius.

THEOREMA XV. PROPOS. XVIII.

Isdem positis: Dico, maius segmentum perpendicularis basis BR. ad maius perpendicularis lateris RI. rationem habere quam latus quadrati ad latus Hexagoni.

Cum enim paulo ante in prop. 17. huius ostensa sint similia triangula IFR. BPR. item similia etiam sint triangula BPR. BVR. ob æquales angulos ad B. & rectos ad PV. erit igitur vt VB. ad BR. ita FI. ad IR. & permutando vt VB. ad IF. ita BR. ad IR. sed VB. ad IF. probata est in propositione 16. habere rationem quam latus quadrati ad latus Decagoni: igitur vt latus quadrati ad latus Hexagoni, ita BR. ad IR. Quod fuit demonstrandum.

4. 6.

16. huius.

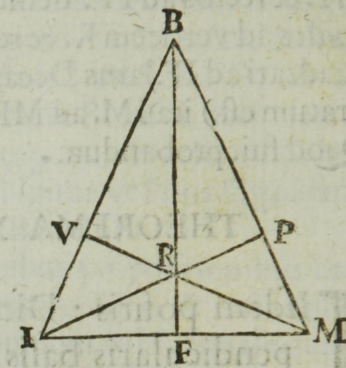
THEOREMA XVI. PROPOS. XIX.

IN triangulo Isoscele ex cuius angulis perpendiculares secant opposita latera proportionaliter; etiam perpendiculares laterum sese proportionaliter secant, maiusque segmentum est ab angulo ad punctum contactus.

SIT rursus triangulum Isosceles IBM. quale propositum est, ac superioribus propositionibus descriptum est.

Dico

Dico tam IP. quam MV. perpendiculares secari proportionaliter in puncto R. maiusque segmentum esse IR. minus RP. item maius MR. minus RV.



Nam cum facta prima IM. cum secunda MB. angulum ad M. & ab extremitatibus primæ, & secundæ I. B. ductæ sint IP. BF. tertia & quarta concurrentes in R. puncto, & secantes opposita BM. in P. & IM. bifariam in F. erit per. 19. huius vt MB. ad BP. id est vt BP. ad PM. ita IR. ad RP. sed BP. est maius segmentum lineæ proportionaliter sectæ, PM. minus. Igitur etiam IR. est maius segmentum, RP. minus lineæ IP. proportionaliter sectæ. Quod erat demonstrandum.

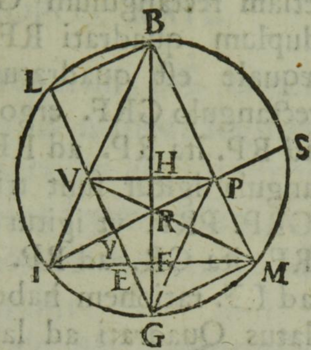
THEOREMA XVII. PROPOS. XX.

SI in triangulo Isoscele ex cuius angulis perpendiculares secant opposita latera proportionaliter, segmentum minus perpendicularis ad basim duplicetur; secabitur aggregatum perpendicularis & minoris segmenti in puncto concursus proportionaliter, cuius minus segmentum erit duplum minoris segmenti, & maius, maius segmentum perpendicularis.

SIT iterum triangulum Isosceles quale sæpe superioribus propositionibus delineatum est. Producatur perpendicularis basis BF. in G. sintque RF. FG. æquales. Dico

BG.

BG. sectam esse in R. proportionaliter, cuius minus segmentum GR. maius RB. Nam quia ex 18. propositione tertij huius est vt MP. ad PB. ita FR. ad medietatem ipsius RB. erit vt MP. ad PB. ita duplum FR. videlicet tota RG. ad totam RB. secta est autem MB. in P. proportionaliter, ex hypothesi, cuius minus segmentum MP. maius PB. Igitur & GB. secta est proportionaliter in R. cuius minus segmentum GR. maius RB. Quod erat demonstrandum.



18.3. huius.

15. 5.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XXI.

IN triangulo Isoscele ex cuius angulis perpendiculares secant opposita latera proportionaliter: medietas aggregati ex perpendiculari ad basim & minori eius segmento est æqualis maiori segmento eiusdem perpendicularis proportionaliter sectæ.

SIT idem triangulum Isosceles quod superiori propositione IBM. & producta FG. sit æqualis segmento FR. & connectatur PG. item PV. secans BF. in H. Cum sint æquales BP. BV. item BM. BI. parallelæ erunt MF. PH. & vt BP. ad PM. ita BH. ad HF. ideoque cum BM. sit secta proportionaliter in P. sitque maius segmentum BP. minus PM. erit BF. secta proportionaliter in H. maiusque segmentum BH. minus HF. Dico HG. esse medietatem ipsius BG. aut æqualem ipsi HB. Cum enim PR. ad RF. rationem habeat quam latus quadrati ad latus Hexagoni, erit quadratum PR. duplum quadrati RF. sed etiam

2. 6.

2. 14.

16. huius.



1. 6. etiam rectangulum GRF. est duplum quadrati RF. igitur æquale est quadratum PR. 17. 6. rectangulo GRF. ergo vt GR. ad RP. ita RP. ad RF. æqui- 6. 6. angula igitur sunt triangula GRP. PRF. 4. 6. vt igitur PR. ad RF. ita GR. ad RP. sed PR. 16. huius. ad RF. rationem habet quam latus Quadrati ad latus Hexagoni igitur GR. ad RP. rationem habet quam latus Quadrati ad latus Hexagoni, 15. huius. vt vero latus Quadrati ad latus Hexagoni ita BR. ad RI. Vt igitur GR. ad RP. ita BR. ad RI. sed & æqualis est angulns ad verticem R. æquiangula igitur sunt triangula GRP. BRI. 27. 1. atque adeo angulus PGR. æqualis angulo IBR. id est RBM. parallelæ igitur sunt PG. BI. & 6. 1. æqualis PB. seu BV ipsi PG. ergo & parallela VG. ipsi 33. 1. defin. 35. 1. BM. & parallelogrammum est BPGV. in quo se diametri PV. BG. bifariam secant in H. est igitur BH. æqualis HG. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc constat punctum H. esse centrum circuli circa triangulum BIM. descripti, atque eundem circulum transire per punctum G. Nam quod centrum circuli dicto triangulo circumscripti sit in recta GB. patet ex Corollario primæ tertij: Quod in puncto H. constat quia recta BG. diuisa est bifariam in H, Quod circulus transeat per. G. eodem modo probatur quia ex propositione, HB. HG. sunt æquales,

THEO-

THEOREMA XIX. PROPOS. XXII.

Iisdem positis. Dico aggregatum BG. ex perpendiculari BF. ad basim, & minori segmento FR. id est FG. seu diametrum circuli circũscripti triangulo BIM. ad maius segmentum perpendicularis ad latus IR. rationem habere quam latus Quadrati ad latus Decagoni.

Nam si connectatur MG. erit angulus BMG. rectus; rectus autem est etiam MFG. Igitur vt BM. ad MF. id est latus quadrati ad latus Decagoni, ita BG. ad GM. id est BG. ad MR. (nam cum duo triangula MFG. MFR. habeant duo latera MFG. MFR. æqualia circa angulos rectos ad F. erunt bases MG. MR. æquales) Quod erat &c.

8. 6.
16. huius.
4. 1.

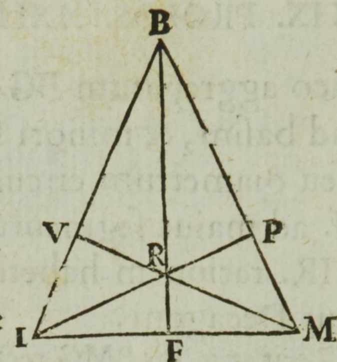
PROBLEMA IV. PROPOS. XXIII.

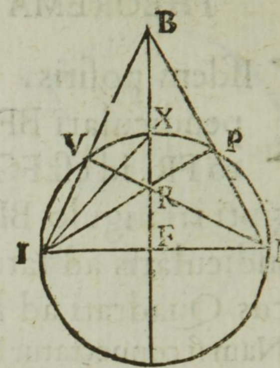
Svper data basi triangulum Isosceles describere, ex cuius angulis perpendiculares secent opposita latera, in quæ incidunt, proportionaliter.

SIT data in secunda figura basis IM. super qua oportet constituere triangulum Isosceles vt propositum est. Primo sit constructum triangulum BIM. in prima figura, nulla data determinata linea, per 12. huius, in quo perpendiculares MV. IP. secent opposita latera proportionaliter, sintq; delineata ea quæ 14. huius dicta sunt. Hinc in secunda figura diuidatur IM. bifariam in F. & centro F. distantia FM. descriptus sit circulus IXM. & fiat vt latus quadrati circulo inscriptibilis ad latus decagoni ita IM. ad MP. quæ MP. in circulo aptetur ex puncto M. quæ producta secet ductam ad IM. perpendicularem FB. in B. (secabit autem eo quod angulus BFM. & acutus FMB. minores sint duobus

13. pron.

recti)
& con-
nectatur
IB. secās
circulū
in V. itē
in MV.
IP. se-
cantes se
in R. per
quod trā





Schol. 13. huius.

sit & perpendicularis FB. Dico in secunda figura constitutū esse super basi data IM. triangulum Isosceles IBM. in quo perpendiculares MV. IP. secant opposita latera BI. BM. proportionaliter. Cum enim triangula IMP. BMF. habeant angulum communem ad M. & rectos ad F. P. (est enim BF. perpendicularis ad IM. & IPM. in semicirculo rectus) erunt æquiangula: igitur vt IM. id est latus quadrati ad MP. id est latus decagoni, ita BM. latus quadrati ad MF. latus decagoni, sed etiam est in prima figura BM. ad MF. vt latus quadrati ad latus Decagoni, & in vtroque angulus rectus BFM. ideoque reliquornm vterque minor recto: similia igitur sunt triangula FMB. atque adeo tota MBI. in vtraque figura. Sed & similiter secta sunt: Nam vt BM. ad MI. in prima, ita BM. ad MI. in secunda, vt modo ostensum est, & vt IM. ad MP. in prima, ita IM. ad MP. in secunda, igitur exæquali vt BM. ad IM. in prima ita BM. ad IM. in secunda, sed in prima secta est BM. proportionaliter in P. ergo & in secunda. Igitur super data basi &c. Quod erat faciendum.

31. 3.

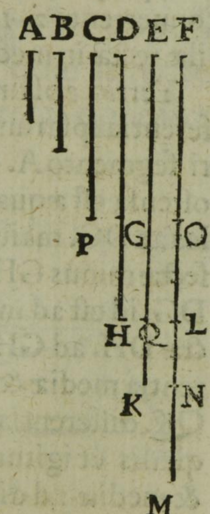
7. 6.
15. 5.

THEOREMA XX. PROPOS. XXIV.

SI ex additione alterna duarum linearum quarum prima sit segmentum minus, altera maius

ius rectæ proportionaliter ſectæ ſex magnitudines ordine conſtituantur quæ ternæ ordine continuo coniugantur: prima & ſecunda coniugatio in medietate Geometrica; tertia in medietate quinta Geometricæ oppoſita; quarta in Harmonica proportionalitate conſiſtet.

Tria ſunt præcipua medietatum genera, teſte Pappo Alexandrino collectionum mathematicarum libro. 3. prop. 16. Geometrica, Arithmetica, Muſica, quæ maxime vtiles ſunt ad antiquorum lectiones, quibus Nicomachus Pythagoreus & alij nonnulli tres addiderunt, recentiores adhuc quatuor alias: Geometrica medietas eſt cum tres quantitates eandem proportionem habent: Arithmetica, cum trium quantitatem eadem eſt differentia, de qua ſuperius plura. Harmonica quando tres numeri ita diſponuntur vt eadẽ ſit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos, ad differentiam inter duos minores. medietas vero quinta ſeu Antigeometrica, vt alias, omittamus, eſt cum vt tertius terminus ad ſecundum, ita primi exceſſus ad exceſſum ſecundi.



Sint igitur ſex lineæ rectæ quarum prima A. ſit minus ſegmentũ rectæ proportionaliter ſectæ, ſecunda B. maius ſegmentum eiuſdem rectæ eodem modo ſectæ. tertia CP. conſtituatur ex maiori & minori ſegmento: Quarta DH. ex tertia & maiori ſegmento: quinta EK. ex quarta & minori ſegmento: ſexta FM. ex quinta & maiori ſegmento: Dico ſi coniugentur ordine continuo ternæ A. B. CP. & B. CP. DH. & CP. DH. EK. & DH. EK. FM. tres primas A. B.

CP. item tres secundas B. CP. DH.' esse in medietate Geometrica: tres vero tertiæ coniugationis CP. DH. EK. esse in medietate Antigeometrica; denique tres vltimas DH. EK. FM. esse in proportionalitate Harmonica.

Primo cum recta CP. sit composita ex minori segmento A. & maiori B. constat ex definit. 3. 6. esse vt A. ad B. ita B ad CP. Quod est esse in proportionalitate Geometrica.

defin. 3. 6.

Secundo abscindatur DG. æqualis ipsi CP. quoniam recta DH. constat ex recta CP. & segmento maiori B. erunt GH. & B. æquales, & diuisa erit DH. in G. ptoportionaliter cuius maius segmentum DG. æquale ipsi CP. minus GH. Cum igitur B. sit positum maius segmentum rectæ CP. & recta CP. maius segmentum ipsius DH. quarum vtraque proportionaliter secatur à dictis segmentis erit ex conuertente 2. 14 vt B. ad CP. ita CP. ad DH. ideoque tres illæ rectæ in medietate Geometrica constituuntur.

5. 13.

Tertio abscindatur EQ. æqualis ipsi DH. erit QK. differentia ipsarum DH. DK. ex suppositione, æqualis minori segmento A. & GH. differentia duarum DH. CF. iam ostensa est æqualis maiori segmento B. & CP. DG. æquales ac DG. maius segmentum rectæ DH. proportionaliter sectæ minus GH. vt igitur media HD. ad segmentum maius DG. id est ad minimam CP. ita DG. segmentum maius rectæ DH. ad GH. segmentum minus, sed etiam GH. differentia mediæ & minimæ est segmento maiori B. & recta QK. differentia mediæ & maximæ segmento minoris A. æqualis vt igitur media ad minimam ita differentia minimæ & mediæ ad differentiã mediæ & maximæ. Erit igitur conuertendo vt tertius terminus CP. ad secundum DH. ita excessus primus QK. ad secundum GH. quæ definitio est medietatis quintæ apud Pappum.

defin. 3. 6.

Quarto ex FM. abscindatur FN. æqualis ipsi EK. & FL. ipsi DH. & FO. ipsi DG. Quoniam LN. est æqualis ipsi QK. id est ipsi A. & NM. adiecta est æqualis ipsi B. erit tota LM. æqualis duabus A. B. id est toti CP. seu DG. maiori

nem-

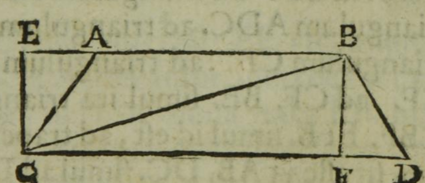
nempe segmento DH. proportionaliter sectæ id est ipsi FO. ipsi autem DH. est æqualis FL. igitur etiam FL. secta est proportionaliter in O. cumque adiecta sit LM. maiori segmento DG æqualis erit FM. secta in L. proportionaliter. Patet igitur esse vt FM. totam ad FL. maius segmentum, id est ad DH. minus extremum ita differentiam maiorum NM. quæ est æqualis B. maiori segmento ad QK. differentiam minorum, æqualem minori segmento A. quæ est ratio Harmonica. Quare si ex additione alterna &c. Quod erat demonstrandum.

5. 13.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXV.

TRapezium habens duo latera parallela, diuiditur à linea recta per angulos oppositos ducta in duo triangula quæ inter se eandem rationem habent quam latera opposita parallela.

Sit trapezium ABDC. cuius latera AB. CD. parallela & angulos oppositos C.B. coniungat recta CB. Dico esse vt AB. ad CD. ita triangulum BAC. ad triangulum BDC. producta enim recta BA. si



opus fuerit, aut alia ex parallelis ducatur ex C. ad CE. perpendicularis CE. item ex B. ad CD. perpendicularis BF. cũ CE. BF. sint parallelæ item BE. CF. erit ECFB. parallelogrammum: æqualia igitur latera opposita CE. FB. Triangulorum igitur BAC. BDC. æqualis est altitudo CE. BF. Est ergo vt basis BA. ad basim DC. ita triangulum BAC. ad triangulum BDC. Quod erat.

35. defin. 34. 1. 4. defin. 1. 6.

THEO-

THEOREMA XXII. PROP. XXVI.

TRapezia in eisdem aut æqualiter distantibus parallelis ita se habent inter se, vt duo latera vnius parallela, ad duo latera parallela alterius.

Sint trapezia ABCD. BCFE. EFGH. inter easdem parallelas AH. DH. & diuidantur à lineis rectis DB. CE. FH. per angulos oppositos ductis in triangula, quæ (vt superiori demonstratur) eandem habent altitudinem. Dico esse vt AB. & DC. simul ad rectas BE. CF. simul ita trapezium ABCD. ad tragelium BCFE.



22. huius. 18. 5. 1. 61. 4. huius. 18. 5. 22. 5.

Est enim vt recta AB. ad rectam DC. ita triangulum ABC. ad triangulum ADC. & componendo vt AB. DC. simul ad DC. ita ABC. ADC. triangula simul, id est, trapezium ABCD. ad triangulum ADC. & vt DC. ad CF. ita triangulum ADC. ad triangulum CBF. & vt CF. ad BE. ita triangulum CBF. ad triangulum EFB. & componendo vt CF. ad CF. BE. simul ita triangulum CEF. ad triangula CBF. EFB. simul id est, ad trapeziũ BCFE. cũ igitur ostensum sit esse vt AB. DC. simul ad DC. ita trapezium ABCD. ad triangulum ADC. & vt DC. ad CF. ita trianguiũ ADC. ad triangulum CBF. & vt CF. ad CF. BE. simul ita triangulum CBF. ad trapezium BCFE. erit ex æquo vt AB. DC. simul ad CF. BE. simul ita trapelium ABCD. ad trapezium BCFE.

Idem demonstrabitur de trapezio EFGH. Quod erat &c.

COROL-

COROLLARIVM.

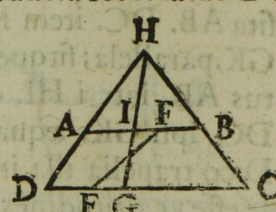
Ex demonstratis superiori propositione deducitur quod. Si Trapezium cuius duo latera parallela diuidantur linea secante vtrumque latus parallelum: erunt partes ablatæ inuicem, vt duo latera parallela vnius partis ad duo latera parallela alterius.

Si trapezium AEFD. cuius duo latera AE. DF. parallela quæ diuidantur recta BC. Dico esse vt AB. DC. simul ad AE. DF. simul ita pars ABCD. ad partem BEFC. Hoc euidenter patet ex propositione.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXVII.

SI in trapezio in quo duo latera parallela, a puncto in quo duo non parallela producta concurrunt ducatur recta, diuidens lineam rectam vtrumque latus parallelum secantem: habebunt trapezij partes eandem rationem, quam partes lateris vtriusuis paralleli à ducta linea diuisi.

Rursus trapezium ABCD. secetur recta EF. vtcumque & DA. CB. latera non parallela producantur dum coeant (ponuntur enim non parallela) in H. & diuisa recta EF. bifariam in K. ducatur recta HK. quæ producta secet latus DC. in G. & latus AB. in I. Dico esse vt AI. ad IB. aut DG. ad GC. ita partem AFED. ad partem EFBC. Cum enim parallelæ sint AB. DC. easque secent EF. GI. rectæ; erit in triangulo KEG. angulus KEG. æqualis alterno KFI. in triangulo KFI. & angulus GKE. æqualis angulo FKI. ad verticē: ponitur autē FK. æqualis KE. æqualia igitur sunt triangula KEG. KFI. Si igitur æqualibus



10. 6.

29. 1.

15. 1.

26. 1.

bus

2. pron. bus triangulis KEG. KFI. addatur cõmune fruſtũ AIKED. erunt trapezia AIGD. AFED. æqualia. Eodem modo oſtendetur trapezia BIGC. BFEC. eſſe æqualia. Cum autem in triangulo HDC. ducta ſit lateri DC. parallela AB. & ex angulo oppoſito H. recta HIG. vtramque ſecet punctis I. G. Schol. 4. 6. 1. 6. erit vt AI. ad IB. ita DG. ad GC eſt autem vt DG. ad GC. ita triangulum DHG. ad triangulum GHC. & vt AI. ad IB. 11. 5. ita triangulum AHI. ad triangulum IHB. erit ergo vt triangulum DHG. ad triangulum GHC. ita triangulum AHI. ad triangulum IHB. Cum ergo ſit vt totum triangulnm DHG. 19. 5. ad totum GHC. ita pars AHI. ad partem IHB. erit reliquũ trapezium AIGD. id eſt AFED. quod illi oſtenſum eſt æquale ad reliquum BIGC. hoc eſt BFEC. illi æquale, vt totum triangulum DHG. ad totum GHC. ſed vt DHG. ad ad GHC. ita oſtenſum eſſe DG. ad GC. & AI. ad IB. erit igitur vt DG. ad GC. aut AI. ad IB. ita pars AFED. ad partem BFEC. Quod erat &c.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXVIII.

SI duo trapezia duo latera parallela æqualia habuerint, vtrumque vtrique: erunt inter ſe vt altitudines.

Sint duo trapezia ABCD. HIKM. quorum latera oppoſita AB. DC. item HI. GK. parallela; ſitque latus AB. lateri HI. & DC. ipſi GK. æquale. Dico trapeſia illa inter ſe eſſe vt altitudines. Du cantur diagonij AC. HK. diuidentes trapezia in duo vtrinq; triangula, quæ, vt patet ex progreſſu 25. huius eandem vtrumque quam ſuum



tra-

trapezium altitudinem habet, quæ fit illic FC. hic HM. Cum ergo duo triangula HKI. ACB. bases AB. HI. æquales habeant, erunt inter se vt altitudines FC. HM. Item quia triangula ADC. HGK. bases DC. GK. æquales habent erunt inter se vt altitudines FC. HM. ergo vt triangulum ACB. ad triangulum HKI. ita triangulum ADC. ad triangulum HGK. & permutando ac componendo & iterum permutando, vt trapezium ABCD. ad trapezium HIKG. ita triangulum ADC. ad triangulum HGK, est autem probatum esse triangulũ ADC. ad triangulũ HGK. vt est altitudo FC. ad altitudinem HM. igitur vt altitudo CF. ad altitudinem HM. ita trapezium ABCD. ad trapezium HIKG. Quod erat demonstrandum.

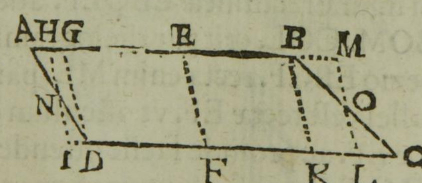
Schol. 1. 6.

11. 5.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXIX.

SI in trapezio habente duo latera parallela secto vtcumque recta linea transeunte per latera parallela abscindantur minora latera ex maioribus, & residuorum medietas accipiatur: erit vt vnum ex minoribus lateribus cum medietate sui excessus, ad alterum minus latus cum medietate eius excessus, ita pars trapezij ad partem.

Sit trapezium ABCD. cuius duo latera AB. DC. parallela, quod diuidatur vtcumque linea EF. vtrumque latus parallelum secante. Abscindatur ex parte EA. maiori quam FD. recta EG. rectæ FD. æqualis, & residuum GA. diuidatur bifariam in H. & rectæ GD. ducatur parallela HI. secans AD. in N. occurrens rectæ FD.



productæ in I. Eodem modo ex FC. maiori latere quam EB. abſcindatur rectæ EB. æqualis FK. & reſiduum KC. diuidatur bifariam in L. & rectæ BK. ducatur parallela LM. occurrens rectæ EB. productæ in M. ſecans BC. in O. erit AG. exceſſus quo EA. ſuperat FD. eiuſque medietas HD. ſeu ID. Item erit KC. exceſſus quo FC. ſuperat EB. eiuſque medietas KL. ſeu BM. Dico eſſe vt EM. ad EH. ſeu vt FL. ad FI. ita trapezium EBCF. ad trapezium EADF. ſunt enim tam GD. quam BK. parallelæ rectæ EF. Nam cum parallelæ ſint & æquales rectæ EG. FD. ex conſtructione, rectæ GD. EF. eas coniungentes parallelæ erunt & æquales. (33. 1.) Eodem modo parallelæ erunt & æquales EF. BK. Rurſus parallelogramma erunt tam HGDI. quam BKLM. (35. defin. 1.) quod ex conſtructione latera oppoſita habeant parallela. Et cum parallelogrammum GHID. & triangulum ADG. ſint in iiſdẽ parallelis AG. ID. & baſis AG. trianguli ADG. ſit dupla baſis AH. parallelogrammi HGDI. (Schol 41 1.) erit triangulum ADG. æquale parallelogrammo HGDI. eodem modo oſtendetur triangulum BCL. æquale parallelogrammo BMLK. Rurſus erunt triangula BOM. LOC. æquiangula & æquilatera, nam anguli ad verticem O. æquales ſunt: (15. 1.) item angulus MBO. æqualis angulo LCO. & BMO. angulo CLO. (29. 1.) quod parallelæ ſint BM. LC. latus autẽ BM. æquale eſt lateri KL. quod parallelogrammum ſit BMLK. (34. 1.) & latus KL. lateri LC. ex conſtructione, æqualia igitur latera BM. LC. (1. pron.) & latera BO. OC. & MO. OL. (26. 1.) & totum triangulum toti triangulo. Idem oſtendetur de triangulis ANH. IND. ſi igitur cõmuni figuræ rectilineæ EBOLF. addantur æqualia triangula BOM. COL. erit parallelogrammum EMLF. (2. pron. 1.) æquale trapezio EBCF. recta enim ML. parallela rectæ BK. (quæ parallela eſt rectæ EF. vt oſtenſum eſt,) eſt etiam parallela rectæ EF. (30. 1.) ac proinde facile oſtendetur eſſe parallelogrammũ EMLF. Item ſi communi figuræ rectilineæ EHKD. addantur æqualia triangula ANH. DNI. erunt parallelogrammũ EHIF. & trapezium EADF. æqualia. (2. pron. 1.) Eſt autem vt LF. ad (1. 6.)

FI.

FI. id est ad EH. ita parallelogrammum EMLF. ad parallelogrammum EHIF. Igitur vt LF. ad FI. ita trapezium EBCF. ad trapezium EADF. Quod fuit probandum. 34. 1.

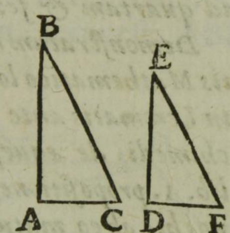
COROLLARIVM.

EAdem sequentur si latera AB. & DC. bifariam diuidantur, & per puncta diuisionum ducantur rectæ EF. parallelæ, vt ex demonstratione constat.

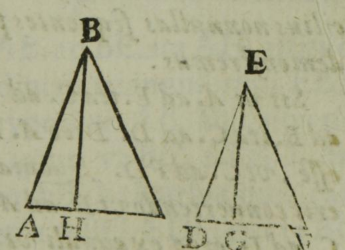
LEMMA I.

DVo triangula angulum angulo æqualem habentia, & circa angulos æquales latus vnum lateri æquale; rationem habent quam reliquum latus circa angulum æqualem ad reliquum latus.

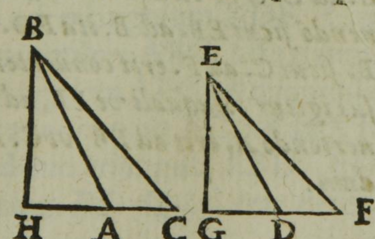
Sint duo triangula ABC. DEF. quæ angulos A. D. æquales habeant, & latera AC. DF. æqualia. Dico esse vt AB. ad DE. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF.



Sint primum triangula ABC. DEF. rectangula ad A. D. erunt AB. DE. eorum altitudines, cum igitur æquales sint AC. DF. ex hypothesi, erit vt AB. ad DE. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF. 1. 6.



Sint secundo triangula ABC. DEF. obliquangula, & ducantur in latera æqualia, producta si opus fuerit, perpendiculares BH. EG. Quoniam æquales ponuntur anguli BAC. EDF. & recti



32. 1. 13. 1. *ſunt anguli ad HG. erunt in triangulis oxygonijs reliqui HBA. DEG. in amblygonijs BAN. EGD. æquales, quare triangula BHA. EGD. erunt æquiangula, eritque vt AB. ad BH. ita DE.* 1. 6. *ad EG. & permutando vt AB. ad DE. ita HB. ad EG. ſed vt HB. ad EG. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF. (cum æquales ponantur AC. DF. & perpendiculares BH. EG. ſint illorum triangulorum altitudines) igitur vt AB. ad DE. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF. Quod erat probandum.*

LEMMA. II.

SI fuerit vt prima quantitas ad ſecundam ita tertia ad quartam & iterum prima ad quintam ſit vt tertia ad ſextam: erit prima ad ſecundam & quintam ſimul, vt tertia ad quartam & ſextam ſimul.

Demonſtratum hoc eſt à Guido Vbaldo, è Marchionibus montis Mathematico longe clariſſimo, primo in Lemmatis ante 13. propoſitionem Archimedis de æqueponderantibus: hinc lib. 1. propoſitione 6. de Cochlea, quod nos hic ab eo mutuum ſumimus, vt facilius nonnullas ſequentes propoſitiones demonſtremus.



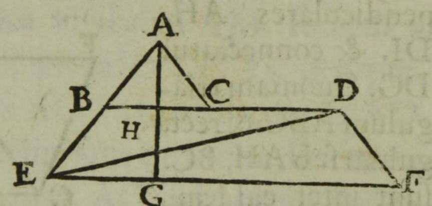
Sit vt A. ad E. ita C. ad F. & vt A. ad B. ita C. ad D. Dico A. ad EB. ſimul eſſe, vt C. ad FD. Quoniam enim eſt vt A. ad E. ita C. ad F. erit conuertendo vt E. ad A. ita F. ad C. ſed eſt vt A. ad B. ita C. ad D. ergo ex æquali vt E. ad B. ita F. ad D. quare componendo ſicut EB. ad B. ita FD. ad D. Quoniam autem eſt A ad B. ſicut C. ad F. erit conuertendo vt B. ad A. ita D. ad C. rurſus igitur ex æquali vt EB. ad A. ita FD. ad C. ac tandem conuertendo A. erit ad EB. vt C. ad FD. Quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXX.

SI triangulum ac trapezium duorum laterum parallelorum angulum vnum vni angulo æqualem habuerint, & vnum latus circa angulum æqualem vni lateri æquale: erit vt reliquũ latus trianguli circa angulum æqualem ad duo latera parallela trapezij, ita triangulum ad trapeziũ.

Habeant triangulum ABC. & trapezium BEFD. laterũ BD. EF. parallelorum angulos ad B. E. & latera AB. BE. æqualia. Dico esse vt BC. ad BD. EF. simul, ita triangulum ABC. ad trapezium BF. connectantur ED. Quoniam parallelæ sunt BD. EF. erunt anguli BEF. id est ABD. & EBD. æquales duobus rectis: quare vna recta est ABE. (compositis videlicet AB. BE. & BC. BD.) Ducaturque perpendicularis AHG. secans BC. ac BD. in H. & EF. in G. Quoniam parallelæ sunt BH. EG. erit vt AB. ad BE. ita AH. altitudo trianguli ABC. ad HG. altitudinem triangulorum EBD. EDF. æquales autem sunt ex hypothesi AB. BE. æquales igitur sunt etiam AH. HG. erit igitur vt BC. ad BD. ita triangulum ABC. ad triangulum EBD. Rursus quia eandem habent altitudinem triangula ABC. EDF. erit vt BC. ad EF. ita triangulum ABC. ad triangulum EDF. Cum igitur sit vt BC. ad BD. ita triangulum ABC. ad triangulũ EBD. & vt BC. ad EF. ita triangulum ABC. ad triangulum EDF. erit, per Lemma 2. præcedens, vt BC. ad BD. EF. simul ita triangulum ABC. ad duo triangula EBD. EDF. simul, id est ad totum trapezium BF. Quod erat demonstrandum.



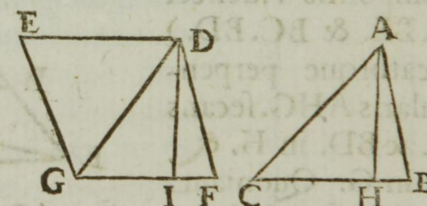
29. 1.
14. 1.
2. 6.
1. 6.
1. 6.
Lemma 2. præcedens.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXXI.

SI triangulum ac trapezium duorum laterum parallelorum angulum vnum vni angulo æqualem habuerint: erit vt rectangulum comprehensum sub lateribus trianguli æqualem angulum comprehendentibus, ad rectangulum contentum sub duobus lateribus trapezij parallelis tanquã vna linea recta, & latere tertio quod æquali angulo adiacet, ita triangulum ad trapezium.

Sit triangulum ABC. trapezium autem DEGF. habentia angulos ABC. DFG. æquales. Dico esse vt rectangulum ABC.ad rectangulum contentum DF.FG.simul & DF. ita triangulum ABC.ad trapezium DFGE. Ducantur perpendiculares AH, DI. & connectatur DG. Quoniam triãgulum ABC.& rectãgulum sub AH. BC. sunt inter easdem parallelas, ac eandem basim habent BC. erit rectangulum sub AH. & BC. trianguli ABC. duplum:eodem modo triangulum sub FG. DI. duplum erit trianguli FDG. & rectangulum sub DI. DE. duplum trianguli DGE. quare totum triangulum sub DI.& FG.DE.duplum est trianguli vtriusque FDG.DGE. id est totius trapezij DFGE. Hinc quoniam æquales sunt anguli ABH. DFI. & recti sunt anguli ad H. I. æquiangula sunt triangula ABH. DFI. erit igitur vt BA. ad AH. ita (posita communi altitudine BC.) rectangulum sub AB. BC. ad rectangulum sub AH. BC. & vt FD. ad DI. ita (posita communi altitudine vtraque DE. FG.) rectangulum sub FD. & DE. FG. simul ad rectangulum sub DI. & DE.



41. 1.

1. 6.

FG.

FG. ſimul. Quare vt rectangulum ſub AB. BC. ad rectangulum ſub AH. BC. ita rectangulum ſub FD. & DE. FG. ſimul, ad rectangulum ſub DI. & DE. FG. ſimul, & conſequentium dimidia, vt rectangulum ſub AB. BC. (quod oſtenſum eſt dimidium rectanguli ſub AH. BC.) ita rectangulum ſub FD. & DE. FG. ſimul ad trapezium DEFG. (quod etiam eſt dimidium rectanguli ſub DI. & DE. FG, ſimul) & permutando, vt rectangulum ſub AB. BC. ad rectangulum ſub DF. & DE. FG. ſimul, ita triangulum ABC. ad trapezium DEFG. Quod propoſitum fuit demonſtrare.

11. 5.

15. 5.

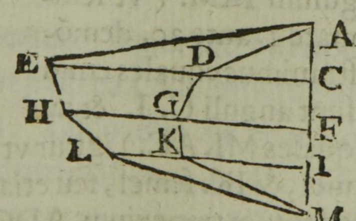
Demonſtratur hoc Theorema à Pappo. Lemm. 8. in 1. Conic. Apollonij.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXXII.

Sint parallelæ CE. FH. IL. quotcumque diſtantes æquali ſpatio ita vt ducta AM. ſecetur à patallelis in partes æquales CF. FI. ſintque iiſdem partibus æquales AC. IM. & ducantur AD. DG. GK. facientes rectilineum quinque laterum ADGKI. Dico triangulum AC. ad totum rectilineum ADGKI. eſſe vt rectam CD. ad rectam CD. bis, ad FG. bis & rectam IK. ſemel.

Vt enim CD. ad CD. ita triangulum ACD. ad ſeipſum; Rurſus vt CD. ad CD. & FG. ſimul ita triangulum ACD. ad trapezium CG. ergo vt CD. ad CD. & CD. FG. ita triangulum ACD. ad triangulum ACD. & trapezium CG. Rurſus quia eſt vt CD. ad CD. & CD. FG. ita triangulum

30. huius.



Lemma 2. ante.
30. huius.

ACD.

ACD. ad triangulum ACD. & trapezium CG. item est vt CD. ad FG. IK. ita triangulum ACD. ad trapezium FK. erit vt CD. ad CD. & CD. FG. & FG. IK. id est ad CD. bis FG. bis IK. semel, ita triangulum ACD. ad triangulum ACD. ac trapezia CG. FK. id est ad totum rectilineum ADGKI. Quod erat demonstrandum.

Lemma 2. ante. 30. huius.

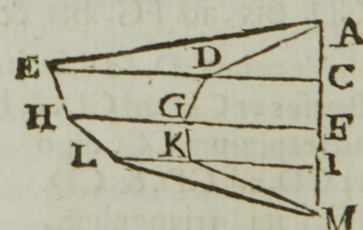
Idem continget si sit plurium laterum, semper enim quæ proportio CD. ad omnia latera duplicata præter vltimum, quod ponitur simplex ita triangulum ACD. ad omnia trapezia quæ componunt trapezium pluri laterum.

THEOREMA XXIX. PROP. XXXIII.

Retentis ijs quæ superiori propositione posita sunt: ducatur etiam KM. ita vt sit rectilineum quinque laterum incipiens à triangulo ACD. & desinens in triangulum KMI. sintque anguli ad C. I. æquales. Dico esse vt CD. ad omnia latera duplicata, nempe ad CD. bis FG. bis IK. bis, ita triangulum ACD. ad totum rectilineum ADGKM.

Vt enim CD. ad CD. bis FG. bis IK. semel ita triangulum ACD. ad totum rectilineum ADGKI. Itē vt CD. ad IK. ita triangulum ACD. ad triangulum IKM. (vt lemmate 1. ante 30. demōstrauimus ęquales enim sunt anguli C. I. & æquales MI. AC.) igitur vt CD. ad CD. bis, FG. bis IK. semel, & IK. semel, seu etiam IK. bis ita triangulum ACD. ad totum trapezium ADGKM. Quod erat probandum. Atque idem omnino probatum in pluribus lateribus.

32. huius.



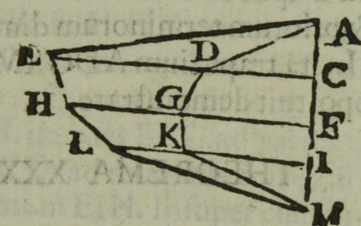
THEO-

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXIV.

PRæter ea quæ præcedenti propositione supposuimus, sit aliud trapezium AEHLI. maius priori, illudque continens.

Dico quod erit vt CD. bis FG. bis & IK. semel ad CE. bis FH. bis IL. semel, ita trapezium ADGKI. ad trapezium AEHLI. Quoniam enim paulo ante demonstratum est, esse vt CD. ad CD. bis, FH. bis IK. semel, ita triangulum ACD. ad trapeziũ ADGKI. erit conuertendo vt CD. bis FH. bis IK. semel ad CD. ita trapeziũ ADGKI. ad triangulum ACD.

32. huius.

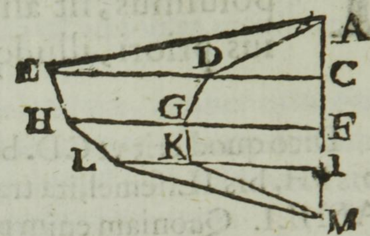


vt vero CD. ad CE. bis FH. bis & IL. semel, ita triangulum ACD. ad totum trapezium AEHLI. (hoc enim ex superioribus Lemmatis & 31. huius aperte sequitur, aut modo quo in 31. huius vsi sumus deducitur) erit igitur ex æqualitate vt CD. bis, FH. bis, IL. semel, ita trapezium ADGKI. ad trapezium AEHLI. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXV.

SInt eadem quæ in schemate superioris propositionis, & ducatur præterea LM. sintque anguli ad C. I. æquales. Dico esse vt compositam ex CD. FG. IK. ad compositam ex CE. FH. IL. ita trapeziũ ADGKM. ad trapezium AEHLM.

33. huius. Vt enim CD. ad CD. bis, FG. bis IK. bis ita triangulum ACD. ad trapezium ADGKM. & conuertendo. Item vt CE. ad CE. bis FH. bis IL. bis ita triangulum ACE. ad trapezium AEHLM. ex 33. huius; & conuertendo: erit igitur ex æquali vt CD. bis, FG. bis, & IK. bis, ad CE. bis, FH. bis, IL. bis ita trapezium ADGKM. ad trapezim AEHLM.

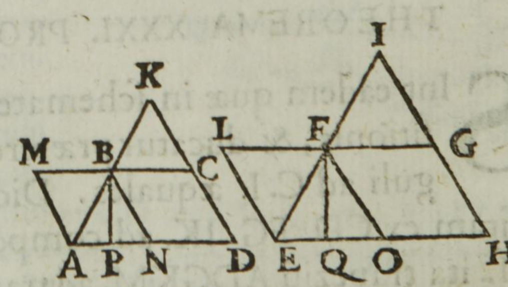


15. 5. & priorum terminorum dimidia vt CD. FG. IK. ad CE. FH. IL. ita trapezium ADGKM. ad trapezium AEHLM. Quod opoituit demonstrare.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXVI.

SI duo ttapezia duo latera parallela proportionalia habuerint: erunt inter se vt rectangula sub quouis laterum parallelorum proportionalium, & altitudine trapeziorum comprehensa.

Sint duo trapezia ABCD. EFGH. quorum latera BC. AD. item FG. EH. parallela, itemque proportionalia; ita vt sit AD. ad EH. vt BC. ad FG. sintque altitudines trapeziorum perpendiculares ad vtrumq; latus trapezij BP. FQ. Dico esse vt rectangulum sub CB. BP. ad rectangulum



sub GF. FQ. aut vt rectangulũ sub DA. BP. ad rectangulum

sub

ſub HE. FQ. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Ducatur ipſi KD. parallela BN. & ipſi IH. parallela FO. Item ipſi KD. parallela AM. & ipſi IH. parallela EL. occurrentes lateribus parallelis trapezij productis ſi opus fuerit, illæ in punctis N. M. iſtæ in O. L.

Quoniam in triangulis KAD. IEH. lateribus AD. EH. parallelæ ſunt BC. FG. ex hypotheſi; erunt triangula KAD. KBC. inter ſe; item IEH. IFG. inter ſe ſimilia. Rurſus quia eſt vt AD. ad EH. ita BC. ad FG. erit permutando vt AD. ad BC. ita EH. ad FG. Cum ergo ſuper duabus AD. BC. ſint conſtituta duo triangula ſimilia AKD. BKC. & ſuper duabus EH. FG. duo itidem ſimilia EIH. FIG. erit vt triangulum AKD. ad triangulum BKC. ita triangulum EIH. ad triangulum FIG. & permutando. Quare cum ſit vt totum triangulum AKD. ad totum EIH. ita pars BKC. ad partem FIG. & reliquum trapezium ABCD. ad reliquum trapeziũ EFGH. erit vt totum AKD. ad totum EIH. Inſuper cum in triangulis AKD. EIH. ductæ ſint ad latera KD. IH. parallelæ BN. FO. erunt triangula KAD. BAN. item IEH. FEO. ſimilia; item cum ſit vt AK. ad KB. ita AD. ad BC. & vt AD. ad BC. ita EH. ad FG. ex hypotheſi, & vt EH. ad FG. ita EI. ad IF. erit vt AK. ad KB. ita EI. ad IF. & per conuerſionem rationis vt AK. ad AB. ita EI. ad EF. Quare cum ſuper duabus AK. AB. & ſuper duabus EI. EF. conſtituta ſint illic duo triangula ſimilia KAD. BAN. iſtic IEH. FEO. ſimilia; erit vt triangulum KAD. ad triangulum BAN ita triangulum IEH. ad triangulum FEO. & permutando vt triangulum KAD. ad triangulum IEH. ita triangulum BAN. ad triangulum FEO. eſt autem trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. vt triangulum KAD. ad triangulum IEH. ergo etiam erit trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. vt triangulum BAN. ad triangulum FEO. & permutando. Quare cum ſit vt totum trapezium ABCD. ad totum trapezium EFGH. ita pars BAN. ad partem FEO. & reliquum parallelogrammum BCDN. ad reliquum

Corol. 4. 6.

22. 6.

19. 5.

Corol. 4. 6.

4. 6.

22. 6.

19. 1.

liquum parallelogrammum FGHO. erit vt totum trapeziū ABCD. ad totum trapezium EFGH. at parallelogrammo BCDN. æquale eſt parallelogrammum ſub CB. BP. & parallelogrammo FGHO. æquale eſt parallelogrammum ſub GF. FG. erit ergo vt rectangulum ſub CP. BP. ad rectangulum ſub GF. FG. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Denique cum ſit vt AD. ad DN. ita AK. ad KB. (quod poſitæ ſint parallelæ BN. KD.) & vt AK. ad KB. ita oſtenſum eſt ſupra EI. ad IF. & vt EI. ad IF. ita EH. ad HO. (ob parallelas poſitas FO. IH.) erit vt AD. ad DN. ita EH. ad HO. ſed vt AD. ad DN. ita parallelogrammum MADC. ad parallelogrammum BCDN. & vt EH. ad HO. ita parallelogrammum LEHG. ad parallelogrammum FGHO. vt igitur parallelogrammum MADC. ad parallelogrammum BCDN. ita parallelogrāmū LEHG. ad parallelogrammū FGHO. & conuertendo ac permutando, vt parallelogrammum BCDN. ad parallelogrammum FGHO. ita parallelogrammum MADC. ad parallelogrammum LEHG. Eſt autem oſtenſum paulo ante eſſe vt parallelogrammum BCDN. ad parallelogrammum FGHO. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. ergo vt parallelogrammum MADC. ad parallelogrammum LEHG. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. ſed parallelogrammo MADC. eſt æquale parallelogrammum ſub DA. BP. & parallelogrammo LEHG. æquale parallelogrammum ſub HE. FQ. vt igitur rectangulum ſub DA. BP. ad rectangulum ſub HE. FQ. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Igitur ſi duo trapezia &c. Quod erat demonſtrandum.

35. 1.
2. 6.
1. 6.
35. 1.

COROLLARIVM. I.

Colligitur ex probatis in propoſitione trapezia ABCD. EFGH. eſſe vt triangula AKD. EIH. quæ ex lateribus non parallelis in vnum punctum productis, & vno laterum parallelorum fiunt: item eadem eſſe vt parallelogramma, quæ

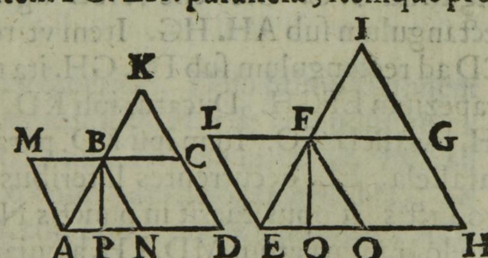
vtro-

vtrouis laterum parallelorum, & vtrouis non parallelorum constant. demonstratum enim est esse vt parallelogrammum BCDN. ad parallelogrammum FGHO. & vt parallelogrammum CDAM. ad parallelogrammum GHEL. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. idemque sequetur si sumantur parallelogramma sub CB. BA. & DA. AB. aut sub GF. FE. & HE. EF. vt inducenti manifestum est. Denique esse vt triangulum BAN. ad triangulum FEO. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. hæc enim omnia ex progressu demonstrationis manifesta sunt.

THEOREMA XXXIII. PROP. XXXVII.

Trapezia quorum duo latera parallela, & vtrumque vtriq; proportionalia; habent rationem eam quæ componitur ex proportione laterum homologorum & proportione altitudinum.

Sint, vt in superiori, duo trapezia ABCD. EFGH. quorum latera BC. AD. item FG. EH. parallela, itemque proportionalia; ita vt sit AD. ad EH. vt BC. ad FG. sintque altitudines trapeziorum perpendiculares ad vtrumque latus trapezij BP. FQ. Dico rationem trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. esse compositam ex ratione AD. ad EH. & ex ratione BP. ad FQ. aut ex ratione BC. ad FG. & ratione BP. ad FQ. Vt enim trapezium ABCD. ad trapezium CDEF. ita rectangulum sub DA. BP. ad rectangulum sub EH. FQ. & rectangulum sub CB. BP. ad rectangulum GF. FQ.



ex præcedenti.

23. 6. FQ. illorum vero rectangulorum ratio composita est ex rationibus AD. ad EH. & BP. ad FQ. aut ex rationibus BC. ad FG. & BP. ad FQ. Igitur ratio trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. composita est ex rationibus AD. ad EH. & BP. ad FQ. aut ex rationibus BC. ad FG. & BP. ad FQ. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXVIII.

TRapezia quæ duo latera parallela, eademque proportionalia, & angulum angulo æqualem habent sunt vt rectangula sub lateribus homologis, & lateribus non parallelis quæ æqualem angulum continent, comprehensa.

SINT vt in schemate penultimæ huius duo trapezia ABCD. EFGH. quorum latera BC. AD. item FG. EH. parallela, itemque proportionalia, ita vt sit AD. ad EH. vt BC. ad FG. sintque præterea anguli ad D. H. ideoque etiam 29. 1. anguli ad G. C. Dico esse vt rectangulum sub AD. DC. ad rectangulum sub AH. HG. Item vt rectangulum sub BC. CD ad rectangulum sub FG. GH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Ducatur ipsi KD. parallela BN. & ipsi IH. parallela FO. Item ipsi KD. parallela AM. & ipsi IH. parallela EL. occurrentes lateribus parallelis trapezij productis si opus fuerit in punctis N. M. & O. L. parallelogramma erunt MD. LH. æquiangula ob angulos æquales D. H. Item parallelogramma æquiangula erunt BD. FH. ob æquales angulos ad C. G. erit igitur, ex his quæ demonstrauit Pappus lib. 7. Mathemat. Collectionum propo- Schol. 23. 6. sit. 172. & ab eo Clauius Schol. in 23. 6. proposit. 5. vt rectangulum sub AD. DC. ad rectangulum sub EH. HG. ita parallelogrammum MD. ad parallelogrammum LH. & vt rectangulum sub BC. CD. ad rectangulum sub FG. GH.

ita

ita parallelogrammum BD. ad parallelogrammum FH. sed vt parallelogrammum MD. ad parallelogrammum LH. & vt parallelogrammum BD. ad parallelogrammum FH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Igitur vt rectangulum sub AD. DC. ad rectangulum sub EH. HG. & vt rectangulum sub BC. CD. ad rectangulum sub FG. GH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Quod propositũ erat demonstrare.

Corol. 37. huius.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXIX.

TRapezia quæ duo latera parallela, eademque proportionalia, & angulum angulo æqualem habent; sunt in ratione composita ex ratione laterum homologorum, & ratione laterum circa angulum æqualem: item ex ratione laterum non parallelorum angulis æqualibus adiacentium, & ex ratione excessuum laterum parallelorum.

Sint eadem omnia quæ superiori. Dico primo rationem trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. esse compositam ex ratione AD. ad EH. & CD. ad GH. Item ex ratione BC. ad FG. & CD. ad GH. ratio enim parallelogrammi MD. ad parallelogrammum LH. composita est ex rationibus AD. ad EH. & DC. ad HG. Item ratio parallelogrammi BD. ad FH. composita est ex rationibus BC. ad FG. & CD. ad GH. Vt autem parallelogrammum MD. ad parallelogrammum LH. & vt parallelogrammum BD. ad parallelogrammum FH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. igitur ratio trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. composita est ex rationibus AD. ad EH. & CD. ad GH. Itemque ex rationibus BC. ad FG. & CD. ad GH.

23. 6.

Corol. 37. huius.

Sint

Sint secundo anguli ad A. E. æquales. Constat AN. esse excessum quo latus AD. alterum parallelum BC. superat, cum in parallelogrammo BD. æqualia sint aduersa latera ND. BC. eodem modo EO. excessus est quo EH. superat FG. & latera BA. FE. latera sunt in suis trapezijs oppositis CD. GH. non parallela, angulis æqualibus A. E. adiacentia. Dico rationem trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. componi ex rationibus AB. ad FE. & AN. ad EO. Cum enim triangula BAN. FEO. æquales habeant angulos ad A. E. habebunt rationem compositam ex rationibus BA. ad FE. & AN. ad EO. Vt autem triangulum BAN. ad triangulum FEO. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. igitur trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. ratio componitur ex rationibus AB. ad EF. & AN. ad EO. Quod secundo loco propositum erat: igitur trapezia quæ duo latera parallela &c. Quod oportebat demonstrare.

34. 1.

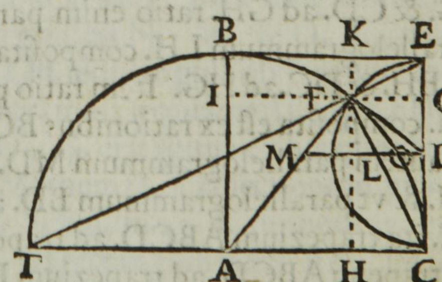
Schol. in 23. 6. proposit. 1.

Corol. 37. huius.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XL.

SI circa duas perpendiculares quarum altera alterius sit dupla circuli describantur: rectæ ex centris ad puncta sectionis ductæ efficiunt angulum rectum.

Perpendiculares sint TC. CE. ad punctum E. illa huius dupla, & ex A. D. centris, quæ diuidunt rectas TC. CE. bifariam, duo circuli secent se in F. & ducãtur DF. AF. Dico tam angulum ACD. quam AFD. esse rectum. Quoad angulum ACD. id constat ex descriptione. Ducatur DM.



pa-

parallela ipſi CT. ſecans circulũ EFC. in L. & rectam AF. in M. & ducatur ad CI. perpendicularis AB. Item connectantur chordæ TF. FC. FE. Quoniam anguli TFC. EFC. ſunt in ſemicirculis, recti ſunt: Vna igitur recta eſt TFE. Vt ergo TF. ad FC. ita FC. ad FE. Quare ſimiles ſunt arcus maioris ac minoris circuli nimirum FBT. ipſi FLC. & FC. ipſi FE. æquales igitur anguli FAC. FDE. Quoniam autem recti ſunt EDM. CAB. ex deſcriptione, ideoque æquales demptis æqualibus FAC. FDE. remanent æquales FDM. FAB. ſed & æquales ſunt FMD. FAC. (cum enim ex deſcriptione duo anguli ACD. MDC. ſint recti erunt MD. AC. parallellæ) æquales igitur ſunt duo anguli FDM. FMD. duobus FAB. FAC. id eſt recto BAC. Quare & rectus eſt reliquus DFM. Quod probandum fuerat.

31. 3.
14. 1.
8. 6.
Lemma. 5. lib. 1. Aſtrolabij clauij.
29. 1.
28. 1.
32. 1.

COROLLARIVM. I.

Hinc conſtat tam rectam AE. tangere circulum EFC. in F. quam rectam DF. circulum CFT. in eodem puncto F. Nam quoniam diametri ſunt AF. DF. & angulus rectus AFD. tam recta AF. cadet extra circulum EFC. quam recta DG. extra circulum CFT. Quare dictos circulos tangent.

16. 3.

COROLLARIVM. II.

Rurſus manifeſtum eſt tam chordam TF. chordæ FC. quam chordam FC. ipſius FE. eſſe duplam. Nam vt TC. ad CE. ita TF. ad FC. & FC ad FE. ſed ex hypotheſi dupla eſt TC. ipſius CE. igitur & dupla eſt TF. ipſius FC. & FC. ipſius FE.

8. 6.

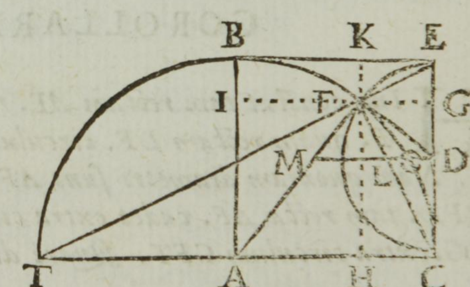
COROLLARIVM III.

Denique probatum eſt arcus FBT. FLC. item FBC. FE. & FB. FL. eſſe ſimiles, vt ex progreſſu demonſtrationis apertum eſt.

PROBLEMA V. PROPOS. XLI.

QVadrantem in duos arcus inæquales ita diuidere vt ſinus verſus minoris arcus, ſinus verſus maioris, ſinus rectus minoris, ſinus rectus maioris, ac ſinus totus proportionem Arithmeticam continuam ab vnitate incipientem & vnitate differentem habeant.

Ducantur duæ perpendiculares CT. CE. ad punctum C. quarum illa huius ſit dupla quibus diuiſis bifariam in A. D. centris A. *D.* deſcripti circuli ſecent ſe in F. & ducta AB. perpendicularis ad CT. auferat Quadrantem BC. Dico Quadrantem BC. ſectum eſſe in F. vt proponebatur. Ducantur ſinus recti FI. FH. ille minoris, hic maioris arcus: Item continuetur IF. in G. erit FG. ſinus rectus arcus EF. & connectatur EB. quæ vtrumque



16. 3.

circulum tanget in E. B. eritque AE. quadratum, & omnes figuræ quadrilateræ interius deſcriptæ erunt parallelogrāma rectangula. Cum igitur ſimiles ſint arcus FE. FOC. erit vt TC. ad CE. ita ſinus rectus HF. arcus FOC. ad ſinum rectum FG. arcus FE. ſed TC. ipſius CE. dupla eſt ex hypotheſi, igitur HF. ipſius FG. id eſt HC. illi æqualis, duplus eſt, ſed & CH. ſinus verſus arcus FOC. duplus eſt rectæ GE. ſinus verſi arcus FE. id eſt ipſius BI. ſeu FK. (producta HF. in K.) eſt igitur EG. ad CH. vt 1. ad 2. & CH. ad HF. vt 2. ad 4. ipſi autem HF. ſi addatur FK. id eſt EG. erit tota HK. id eſt CE. ſeu AC. ſinus totus quinque partes, & CA.

Corol. 3. præced. Lem. 5. lib. 1. Aſtrolab. Clauius. 34. 1. Lemma idem

id eſt

id est IG. si dematur CH. id est GF. duæ partes remanébit FI. trium partium. Igitur BI. est vnius partis CH. duarum FI. trium FH. quatuor AC. seu AB. quinque. Est autem IB. sinus versus arcus FB. CH. sinus versus arcus FOC. FI. sinus rectus arcus FB. FH. sinus rectus arcus FOC. & AC. sinus totus. Igitur factum est quod proponebatur.

SCHOLIVM.

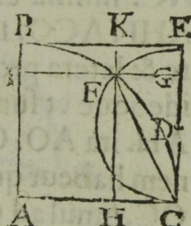
Ex hac propositione quam plurima problemata absolui possunt, tot scilicet quot connexiones, seu coniugationes horum numerorum 1. 2. 3. 4. 5. *quibus singulæ lineæ BI. CH. FI. FH. AC. respondent, fieri possunt. Nam Quadrantis ABC. arcus CB. in F. ita secatur vt*

1 *BI. cum CH. sint æquales ipsi FI.*

2 *BI. cum FI. sint æquales ipsi FH.*

3 *BI. cum FI. ipsius GH. & CH. cum FH. ipsius FI. & FI. cum AC. ipsius FH. & BI. cum AC. ipsius FI. sint duplæ.*

4 *AF. cum FH. ipsius FI. triplæ, & ipsius BI. noncuplæ existant, atque huiusmodi alia problemata formari possunt. Ex regulis enim combinationum inter quinque res ad* 500. *possunt fieri diuersæ compositiones, quæ singulæ singulis problematis materiam præbent, vt inducenti aperte constat.*

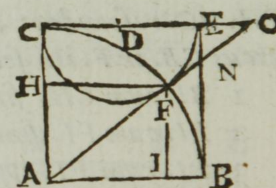


Posset etiam problema proponi hoc modo. Intra Quadratum punctum designare in quo duæ lateribus quadrati parallelæ sese intesecantes, & in dicta latera terminatæ in quatuor segmenta ita diuidantur vt ea cum tota habeant proportionem Arithmeticam continuam ab vnitate incipientem, & vnitate differentem. Nam si intra quadratum ABEC. describatur Quadrans ABC. & semicirculus EFC. sese in F. secantes, & ducantur GFI. KFH. lateribus quadrati parallelæ, habebunt rectæ KF. FG. FN. FH. KH. proportionem continuam quam 1. 2. 3. 4. 5. *vt ex demonstratione superiori apparet.*

PROBLEMA VI. PROPOS. XLII.

QVadrantem ita diuidere vt secans arcus maioris cum tangente sit tripla sinus totius, & secans minoris arcus cum tangente sit dupla sinus totius.

Fiat eadem constructio quæ superiori problemate, & præterea producatur AF. dum rectam BE. secet in N. & CE. productam in O. erit BN. tangent arcus minoris BF. & AN. eius secans: item erit CO. tangens arcus maioris FC. & AO. secans eiusdem arcus. Dico AO. OC. simul esse triplam AC. & AN. NB. simul duplam eiusdem AC. similia enim sunt triangula AHF. ACO. Item AIF. ABN. quare & latera proportionalia habent. ideoque vt sunt FA. FH. simul ad AH. ita AO. OC. simul ad CA. at FA. FH. ad AH. rationem habeut quam 9. ad 3. id est quam 3. ad 1. Igitur AO. OC. simul ad CA. rationem habent quam 3. ad 1. Eodem modo ostendemus cum AF. FI. ipsius IA. sint duplæ ex precedenti, etiam AN. NB. ipsius AB. esse duplas. Quare quadrantem ita diuisimus &c. Quod erat faciendum.



proposit. præcedenti.

COROLLARIVM.

MAnifestum est ex hactenus demonstratis sinum totum AC. tangentem CO. & secantem AO. esse in proportione Arithmetica qua est in his numeris 3. 4. 5. sunt enim ob similitudinem triangulorum AHF. ACO. tres rectæ AC. CO. AO. tribus AH. HF. AF. proportionales, istæ vero habent rationem, Arithmeticam dictorum numerorum, eandem igitur habent & illæ.

3. huius.

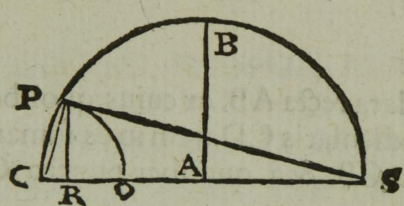
Eodem modo probatur tres AB. BN. AN. esse vt hos numeros

meros 4. 3. 5. *quod hanc rationem habeant tres illis proportionales rectæ AI. IF. AF. Quare ſeptem lineæ BI. CH. FI. FH. AC. CO. OA. erunt in continua proportione iſtorum numerorum* 3. 6. 9. 12. 15. 20. 25.

PROBLEMA VII. PROPOS. XLIII.

QVadrantem ita diuidere vt ſinus verſus arcus ſit octaua pars ſinus totius.

Sit quadrans ABC. in quo ſumatur chorda CP. æqualis medietati ſinus totius CA. & demittatur in CA. perpendicularis PR. id eſt ſinus rectus arcus PC. cuius ſinus verſus CR. Dico CR. eſſe octauam partem ipſius AC. Perficiatur ſemicirculus CBS. & connectatur SP. Quoniam angulus SPC. rectus eſt, vt & angulus PRC. erit vt SC. ad CP. ita PC. ad CR. eſt autem CP. ex hypotheſi medietas ſemidiametri CA. atque adeo quarta pars totius diametri SA. Igitur etiam CR. eſt quarta pars ipſius CP. ideoque ipſius CA. octaua pars. Quare quadrantem ita diuiſimus &c. Quod facere oportebat.



31. 3.
8. 6.

COROLLARIVM.

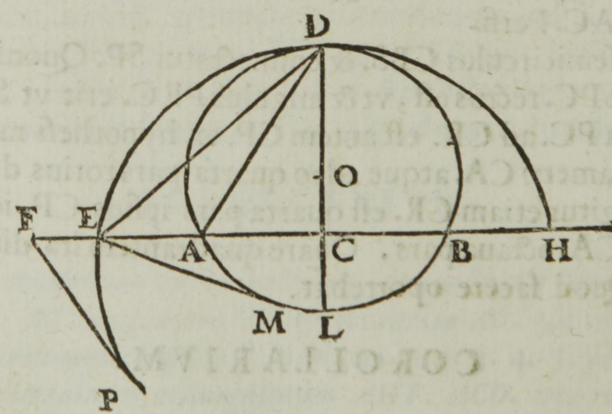
H*Inc conſtat ſi chorda ſit ſinus totius dimidia pars, ſinum verſum eſſe octauam partem eiuſdem ſinus totius.*

THEO-

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XLIV.

SI à puncto rectæ datæ, in quod recta perpendicularis incidit duæ rectæ æquales hinc inde accipiantur, & ad cuiusuis extremum ex quouis perpendicularis puncto ducatur subtendens angulum rectum, ac subtendenti æqualis in data recta ex puncto incidentiæ accipiatur: erit rectangulum sub tota accepta vna cum excessu subtendentis, & dicto excessu comprǣhensum æquale quadrato perpendicularis inter punctum in ea acceptum, & punctum incidentiæ comprehensæ.

Sit data recta AB. ex cuius quolibet puncto C. ducatur perpendicularis CD. item in ea sumantur duę partes æquales CA. CB. & à quolibet puncto C. in perpendicula-



ri sumpto ducatur subtendens DA. ipsique DA. ex C. æqualis CE. Dico rectangulum BEA. quadrato DC. esse æquale. Quoniam recta BA. diuisa est bifariam in C. eique

que adiecta est recta AE. erit rectangulum BEA. vna cum quadrato AC. æquale quadrato CE. hoc est quadrato DA. (æquales enim ponuntur CE. DA.) est autem quadratum DA. æquale quadratis DC. CA. igitur rectangulum BEA. vna cum quadrato AC. est æquale quadratis AC. CD. Quare ablato communi quadrato AC. remanebit rectangulum BEA. æquale quadrato CD. Quod erat demonstrandum.

6. 5.

47. 1.

COROLLARIVM.

Quod si sumatur ipsi CE. æqualis CH. & subtendenti DE. æqualis CF. erit rursus rectangulum HFE. quadrato DC. æquale, ideoque rectangula BEA. HFE. inter se æqualia. Idemque continget si plures rectæ hoc modo accipiantur.

THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XLV.

Iisdem positis: si per tria puncta ADB. transeat circulus ADB. & producatur DC. per centrum O. in circunferentiæ punctum L. Dico rectangulum AEB. ad quadratum AC. esse vt rectam DC. ad rectam CL.

Rectangulum enim DCL. rectangulo ACB. id est quadrato AC. æquale est (ponitur enim AB. bifariam diuisa in C.) posita autem communi altitudine DC. erit quadratum DC. ad rectangulum DCL. id est, ad quadratum AC. vt recta DC. ad rectam CL. sed quadratum DC. ostensum est in superiori propositione æquale rectangulo AEB. Igitur vt rectangulum AEB. ad quadratum AC. ita recta DC. ad rectam CL. Quod fuit demonstrandum.

35. 3.

1. 6.

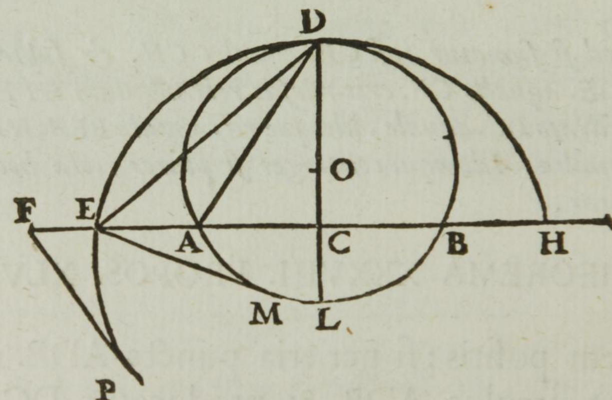
38. huius.

THEO-

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLVI.

POnantur adhuc ea omnia quæ superiori propositione & rectæ CD. ducatur ad circulum æqualis EM. Dico à recta EM. circulum tangi in puncto M.

44. huius. Quoniam rectangulum BEA. æquale est quadrato DC. 1. pron. & quadrato DC. ponitur æquale quadratum EM. erit qua-



dratum EM. rectangulo BEA. æquale, igitur recta EM. 37. 3. circulum tanget in M. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

QVod si sumantur CE. CH. ipsi DA. & CF. ipsis DE. æquales ac per E. D. H. describatur circulus, accipiaturque ipsi DC. æqualis FP. quæ ex puncto F. in circulum ducatur, ea ob eandem demonstrationem circulum tanget in P. & quia vtrumque quadratum EM. FP. quadrato DC. æquale est; erunt quadrata EM. FC. id est recta EM. FP. æquales.

FINIS LIBRI IV.

CVRVI

CVRVI AC RECTI
Proportio promota.
LIBER QVINTVS.

QVANTI Mathematicas disciplinas fecerit magnus ille Academiæ moderator Plato, neminem ignorare arbitror qui vel in admodum vulgata historia mediocriter sit versatus. Certè vt ante ipsum Pythagoras neminem in subliniorem Philosophorum claßem admittebat, qui prius in solida illa septem annorum ἐχεμυθίᾳ μαθηματικὸς τὰ μαθήματα, ac Geometriam præsertim, Arithmeticam, Harmonicamq; non excoluißet, ità iste omnes Geometriæ ignaros Academiæ ingreßu arcebat inscripto foribus edicto ne quis ἀγεωμέτρητος ingrederetur; neq; verò iam ingressos ab eius exercitatione feriari sinebat, sed singulis diebus Geometricum problema proponebat, vt nimirum animam ex numeris ac figuris veluti concinnatam sui similibus exerceret, ac modo ad infinitas omnisq; interualli ac diuisionis expertes formas quibus diuinam mentem γεωμετρεῖν haud ignorabat cogitationem erigeret: modo ad vniuersi iucundum spectaculum, quod totum pulcherrimis rationibus atq; aptis proportionibus colligatum est, deduceret; deniq; quòd maxime spectabat,

Aulus Gellius lib. 1. c. 9.

Tzezes. Adag. chil. 3. centur. 3.

Philoponus.

Plutarchus Sympos. lib. 8. q. 2.

Plato in Timæo.

figuras virtuti conuenientes, modulationes, ac motus facilius traderet, & vitiorum defectus, atq; excessus apertius indicaret. Quid? quod vel Dijs adeo curæ fuisse existimarit mortales Geometria institui, vt eius contemptum grauibus pœnis persequerentur. Delijs enim peste laborantibus, teste Philopono in comment. in 7. c. primi posteriorum ad illa Aristotelis verba, ἀλλ' ἐδεὶ ὅτι δύο κύβοι κύβος: consultus Apollo respondit liberatum iri peste si arã suam, quæ cubicæ erat figuræ, duplicassent: conductores priori aræ cubum alterum æqualem superposuerunt, atq; ità cubi forma immutata facta est ara non cubica sed δοκὶς seu quadrilatera columna. Lue itaq; minime cessante iterum consulentibus respondit Apollo nõ esse oraculo satisfactum, se enim imperasse vt aram forma cubi retenta priore duplo maiorem erigerent, non vt cubo cubum imponerent. Hoc illi oraculum ad Platonem deferunt, qui respondit neglectæ Geometriæ Græcos à Deo accusari, neq; id aliter fieri posse quam si inter duas in dupla proportione datas rectas (quod tamen ante ipsum Hippocrates Chius animaduerterat) duæ mediæ proportionales reperirentur. Quod problema non solum ad discipulos reiecit, sed ipse quoq; in eodem argumento elaborauit, excogitato elegantissimo mesolabio quod extat apud Eutocium in comment. super secundum Archimedis de sphæra, & cylindro, Philopono, quod quis mirari possit, non visum. Neq; vero hoc vnum illius inuentum fuit; nam primus sectiones Conicas & Cylindricas, vt quidam existimant, inchoauit; modum demonstrandi per analysim excogitauit; rationem Gæodeticam agri dimentiendi elegantissimam reperit. Sed hæc de eo alij; Quid vero si quæ extant eius ingenij monumenta euoluamus, quàm multa in eis Mathematica occurrent, quæ etiam olim Theon Smyrneus, ac Philippus Mendæus commentarijs illustrarunt? Sed quod ad rem nostram magis facit, quot ille passim laudibus Mathesin totam, sed Geometriam præsertim in cœlum extollit? An non in Timæo Mathematicam cognitionem erudiendi viam appellat, quod, vt inquit Proclus, eam habeat rationem ad vniuersorum scientiam quam eruditio ad virtutem, ac velut hæc animum probis ad vitam moribus informat, ita illa cogitationem nostram animæq; oculum ad eam quæ inde procedit euectionem seu circumactionem præparat? Annon de legibus 6. & 7. de singulis Mathematicis addiscendis leges sancit, ac tantum Geometriæ tribuit vt asserat qui asymmetriam quantitatum ignoret eum non in hominum sed pecudum censu habendum esse? Quid? quod apud eum in Republica Socrates asserit oculum animi qui alijs studijs veluti excæcatur

Philoponus in 7.c.1.posteriorum. Valer. Max. l.8. cap. 13. Plut. de dæmon. Socratis.

Proclus l. 2. elem. c. 4.

Eratohstenes, apud Eutoc. Comment. ĩ Archimed.

Laert. ĩ Plat. 2. Vitruuius. lib. 9. c. 1.

Proclus c. 8. in lib. 1. elementorum.

Proclus ibid. Plato 7. de Rep.

cæcatur atq; effoditur, Mathematicis disciplinis recreari, & ab inanibus simulachris & rerum ludibrijs ad ea quæ vera sunt; ab obscura ac dubia luce ad vibratum intelligendi fulgorem, & prorsus à specu & vinculis generationis, ac materialibus retinaculis ad incorpoream & indiuisam essentiam exurgere? Ac ne longior sim, Mathematicam vbiq; scientiam vocat, maximæ felicitatis causam, eiusq; luminis largitricem, quod iuxta Homericam Mineruam decem mille corporis, ideoq; vniuersis Argi oculis sit præferendum.

Proclus c. 10. in 1. elē. Homerus in Odyss.

At cur ista tam multis commemoraui, mi Lector? non alia de causa quam vt te non in admirationem tantum, sed etiam in stuporem ac si fieri possit etiam in ecstasim rapiam, cum te ad coronidem deduxero, atq; ostendero quam inconcinnum fastigium elegantissimo operi imponere, atq; absonam perorationem tot Matheseos laudibus atq; elogijs addere videatur. Nempe sub finem libri septimi de Republica sic de Geometria statuit. Αἱ δὲ λοιπαὶ ἃς τοῦ ὄντος τὶ ἔφαμεν ἐπιλαμβάνεσθαι γεωμετρίαν τε καὶ τὰς ταύτῃ ἑπομένας ὁρῶμεν ὡς ὀνειρώττουσι μὲν περὶ τὸ ὄν, ὕπερ δὲ ἀδύνατον αὐταῖς ἰδεῖν ἕως ἂν ὑποθέσεσι χρώμεναι ταύτας ἀκινήτους ἐῶσι μὴ δυνάμεναι λόγον διδόναι αὐτῶν. ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τὶς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι. *Quod ita vertit Marsilius Ficinus. Reliquæ vero quas diximus verarum rerum esse participes Geometriam scilicet eiusq; comites circa ipsam essentiam quodammodo somniant, syncere autem ab illis quicquam cernere impossibile est, tantisper dum suppositionibus hærent, easq; ratas & immobiles adeo seruant vt illarum rationem reddere nequeant. Nam vbi principium quidem ponitur id quod est ignotum, finis autem & media ex ignoto tracta connectuntur, collectam inde aßertionem quonam pacto scientiam vocemus? De cuius versionis fide si dubitas, en nostram ad verbum ferme redditam. Reliquæ vero quas entis aliquid compræhendere diximus Geometriam videlicet, & quæ ipsam sequuntur, videmus vt somniant circa id quod est, supra autem impossibile ipsis videre, dum suppositionibus vtentes eas immobiles sinunt, earum rationem reddere minime valentes. Cui vero principium est id quod non nouit, finis vero & media ex eo quod minime nouit, qui fieri poterit vt ex huiusmodi assensu scientiam consequatur? Deum immortalem quid hoc ad versum? Itane quam tot laudibus cumulasti, quam toties honorifico scientiæ nomine compellasti, vni Dialecticæ seu Diuinarum rerum cognitioni inferiorem asseruisti, nunc certissimam ignorationem,*

Plato 7. de Rep.

inane commentum, ac somniantis mentis ludibrium vocas? Adeone subito calculum reducis vt quam paulo ante vnione & creta momento post carbone notes? Annon hoc quidlibet ex quolibet efficere, &

Humano capiti ceruicem iungere equinam?

Scio quid ad hæc non sine ratione dici queat; Platonem ζητητικὴν methodum sequutum rebus nomina, quæ primæ rationes offerebant indidisse, hinc cum melior melioris notionis species effulgeret priori denominatione abrogata magis conuenientem atq; accommodatam substituisse, atq; eousq; solerti indagine processisse dum apicem attigisse, remque omnibus numeris absoluisse, & ad senarium deduxisse videretur. Scientiam nempe, vt inquit Proclus, plærisq; in locis omnem vniuersalium appellat cognitionem, ipsamq; sensui singularia cognoscenti opponit, quo sensu in Ciuili, atq; in Sophista non tantum Sophisticam sed etiam adulatoriam præclaro hoc nomine dignatur. Hanc autem vniuersalium cognitionem rursus in eam quæ causas probat, quæq; absq; causis cognoscit distribuit, atq; illam quidem scientiam, hanc experientiam censet appellandam. Res enim, inquit in Symposio, quæ rationem nullam habet, quo tandem pacto scientia esse possit? Hanc vero scientiam cui cognoscendi vim causa tribuit rei subiectæ proprietatibus iterum diuidit, & vnam quidem partibilium coniectatricem seu στοχαστικὴν alteram vero eorum quæ per se sunt, eodemq; modo semper habent cognitionem appellat, quo pacto Medicinam, & omnem quæ res ex materia concretas pertractat à scientiarum consortio seiungit. Mathematicam vero atq; omnem omnino rerum sempiternarum cognitionem scientiæ nomine cohonestat. Hanc deniq; scientiam ita partitur vt alteram ab omni suppositione immunem esse velit, alteram ex suppositione scaturire, & illam quidem citra suppositionem vniuersorum cognoscendorum vim habere, & gradatim ad supremam rerum omnium causam, atq; vltimum bonum scandere, in quo tandem conquiescat: hanc vero certa sibi principia præfinire, ex quibus demonstret quæ ea consequuntur, ideoq; non ad principium, sed ad finem tendere, cuiusmodi cum sit Mathesis eam, vtpote suppositionibus vtentem ab illa quæ suppositiones omnes excludit, ideoq; absolutissima scientia censenda est, deficere.

Proclus cap. 10. in 1. Element.

Acute hæc quidem, sed si Platonis verba diligentius pensitentur, eorumq; sensus penitius inspiciatur, vereor ne aliter ratiocinandum sit.

Ego

Ego quidem sic censeo ad perfectam scientiæ constitutionem id requiri non modo vt certum sit rem subiectam aut eſse, aut eſse poſse, sed eius definitionem, cuius veluti lumine passiones in subiecto hærere demonstrantur, recte atq; probe institutam eſse. Hoc ni constet Cimmerias tenebras esse non scientiam, neq; vigilantis mentis certum spectaculum, sed somniantis animi inane spectrum eſse dicendam: Quid enim? asserat aliquis satis esse ad scientiam, vt subiectum eiusq definitio supponatur, non probetur: hinc ex suppositione certa consequentia deducatur. An non ego statim efficiam vt de Chimæra ipsa certa cognitio esse possit? Deprome ex poetarum figmentis Pegasum: illum demonstrationis materiam hypotheticam statue, hinc sua definitione ita circumscribe, vt sit equus alas pro corporis portione atq; viribus humeris insertas habens; mox ita ratiocinare: omnis equus alas pro corporis mole atq; viribus habens volare potest, atqui huiusmodi est Pegasus, volare igitur potest. Hæccine erit demonstratio? risu ac sibilis explodendus sim si asseram. At recte sequitur ex hypothesi Pegasum volare posse; rectissime; verum non hæc demonstratio est, sed rei absurdæ ex absurda conueniens ac secundum formam illatio. Iam vero cum Geometriæ subiectam materiam diligentius ad libellam exigo, videor mihi comperire minime compertum eſse, aut quod ipsa existere possit, aut quod eius definitiones recte sint institutæ. Nam vniuersale quidem quid considerat Geometria, non tamen vnum ante multa, vt Dialectica Platonis aut Aristotelis Metaphysica, id enim non omnis tantum mutationis, sed & diuisionis ratione caret: neq; vnum in multis vt Naturalis scientia, vbi enim in singularibus impartibile, vel latitudinis expers? vbi quantitas crassitie carens? vbi ex circuli centro sese effundentium linearum æqualitas? vbi semper stabiles laterum rationes, atq; angulorum rectitudines? certe quod sciam nullibi, nam quæcumq; sensibus obuiæ sunt figuræ confusa commistione turbatæ sunt, neq; quicquam in eis reperitur, quod a contrario purum atq; sincerum aſseri poſsit. Sed neq; vnum est ex multis, quod experientiæ atq; coniecturæ proprium est, altius enim aſsurgit Geometria, & ex principijs vniuersalibus non ab experimentis particularibus in suas conclusiones progreditur. Quod nam ego dicemus esse Geometriæ obiectum? idem quod ipse Plato vnum ex vna anima, quæ Geometricarum formarum vnica genitrix, eas non alieno semine sed suaui atque energia in se ipsa conceptas fecundo sinu excludit: ideoque idem ille Diuinus author primas substantias à materiæ contagione intaminatas ~~intelligentiæ~~; sensibiles & infimam natu-

ra condi-

ræ conditionem ſortitas opinioni, & coniecturæ; medias formas, cuiuſmodi ſunt Mathematicæ, mediæ inter intelligentiam & opinionem cogitationi attribuit, quod eas non materia promat ſed ſola cogitatio effingat. Sed eadem Chimeras, Harpyas, Gorgonas effingit; Verum id quidem, ſed hoc inter ea figmenta, & Mathematicas figuras intereſſe dices, quod iſtæ inſtar idæarum ac abſolutiſſimorum exemplarium obtineant, ad quæ quo ſimilitudine propius ſenſibiles acceſſerint, eo maiorem perfectionem atque certitudinem nanciſcantur. Atqui vel de hoc ipſo ambigo, num hæc vera ſint rerum quæ eſſe poſſint exempla, non minus quam vtrum perfecti equi idea ſit Pegaſus, & vtrum eorum definitio ad exactam rei fidem ſit condita. Num igitur forte ad hæc reſpiciens vir ſapientiſſimus ait Geometriam circa eſſentiam ſomniare, ac rei non veræ, ſed ſuppoſita definitione fabrefactæ, quæ forſan ideo theſis à Geometris dicta eſt, naturam inquirere, cuius rationem ideo reddere nequeat quod eius principia tanquam rei commentitiæ non cognoſcat. Hanccine igitur Geometriæ labem hærere ſinemus, vt quæ omnium pene philoſophorum calculis inter principes ſcientias non infimam hactenus ſedem obtinuit, ea iam capite cenſeatur, ac in viliſſimam figmentorum turbam tanquam inane λῆρον amandetur. minime vero, remedium eſt quo huic malo ſuccurratur, & quod magis mireris ex medicinæ ſcito depromptum, quo contraria contrarijs curari ſtatuuntur.

Nihil vt ego quidem reor Matheſi magis contrarium eſt quam motus. Vulgatum eſt in ſuperiori Licæo, neque diſſonat inferior Academia, Mathematicam abſtrahere à motu. Ita naturæ magnus interpres tum alibi paſſim, tum 2. Phyſic. c. 2 qui quantum non ea ratione ſpectari ait à Mathematico qua à Phyſico, nam ille inqui quanta χωρίζει, χοριςὰ γὰρ τῇ νοήσει κινήσεως ἐςί, καὶ οὐδὲν διαφέρει, οὐδὲ γίνεται ψεῦδος χοριζόντων. Separat, ſeparata autem ſunt mente a motu. & nihil intereſt nam abſtrahentium falſitas non eſt; & paulo poſt τὸ μὲν γὰρ περιττὸν ἔςαι καὶ τό ἄρτιον, καὶ τὸ εὐθὺ καὶ τὸ καμπυλον, ἔτι δὲ καὶ ἄρυθμος, καὶ γραμμὴ καὶ σχῆμα ἄνευ κινήσεως. Impar vero & par, & rectum, & curuum, inſuper vero & numerus, & linea, & figura ſunt ſine motu. Ipſe vero toties commòratus nec vnquam ſine laude commemorandus Plato adeo motum in Geometria reformidat, vt ne ipſa quidem nomina quibus quanta quadrari, produci, addique dicuntur in vocum Geometricarum nomenclaturam admittere velit: ita enim in 7. de Repub. λέγουσι μὲν που μάλα γελοίως τε καὶ ἀναγκαίως. ὡς γὰρ

Arist. 2. Physic. c. 2.

Plato 7. de Repub.

πράττοντες, καὶ πράξεως ἕνεκα πάντας τὺς λόγυς ποιύμενοι λέγυσι τετραγωνίζειν τε καὶ παρατείνειν, καὶ παρατιθέναι, καὶ παντα ὕτω φθεγγόμενοι. τὸ δ' ἐςὶ πυ πὰν τὸ μάθημα γνώσεως ἕνεκα ἐπιτήδευομενον. *Loquuntur quidem admodum ridicule atq; coacte qui tanquam agentes atque effectionis gratia verba facientes dicunt quadrare, producere, apponere, atq; aliis eius generis vocibus vtuntur; quasi uero disciplina cognitionis ergo non queratur. Idem etiam Eudoxū atq; Architam Tarentinum, ac Menechmum, reprahendiße dicitur quod Geometriam ad Mechanicam quæ motu exercetur traduxißent, atque Philosophiam prostituissent. At audi paradoxum non minus verum quam admirandum. Aio neque Geometriam esse absque motu, neque eius veritatem sine motu intelligi poße. Nemo est qui Philosophiam vel à limine salutarit, cui notum non sit Matheseos subiectum esse quantitaem: hanc autem vel continuam eße vel discretam; illam Geometriæ istam Arithmeticæ materiam præbere: rursus continuam vel permanentem eße vel successiuam: successiua comprehendi motum atque tempus ideoque motum materiæ tamen inquinamentis expurgatum Geometriæ ditione teneri. Sed & aßero permanentis ipsius quantitatis veritatem in profundissimis tenebris immersam latitare ni eā inde motus in apertam lucem eruat. Supponit Stichiota lineam esse quæ in longitudinem extenditur. latitudine omnino caret; & rectam dici cum ex æquo sua interiacet puncta. Ego vero hac de re plurimum non dubito, cum enim neque lineam rectam, nec lineam in rebus indiuiduis vnquam viderim, num ea sit, ant omnino osse possit, vel si vtrumque sit, vtrum recte suis terminis circumscripta sit, ac probe definita certo statuere non possum. Prodeat in medium motus ac punctum afficiat, fluat illud, ac sui veluti vestigium relinquat, an non statim intelligis progreßu illo longitudinem delineari latitudine carentem? ni velis aßerere punctum a quo producitur secari posse, quod indiuiduæ ipsius naturæ omnino aduersatur: quod si idē punctum breuissimo interuallo ex vno in alium terminū contēdat, ita vt ab eo ne tantillum quidem deflectat, nunquam subsultet numquā subsidat: cui nō statim manifestū euadit et lineam rectam eße poße, & recte esse definitam? neq; aliter de superficie statuendum; sed apertius forte aßertioni fidem astruit circulus, & quæ ex eo figuræ seu planæ seu solidæ deriuantur. Circulus inquit elementorum artifex, est figura plana vna linea contenta quæ circumferentia vocatur, ad quam ab vno puncto eorum quæ intra superficiem sita sunt omnes rectæ incidentes inter se sunt æquales. Hic amarum renidebit morosus veritatis perscrutator,*

Plut. in Marcell. & in Symposiac.

Euclid. defin. 2. & 4. lib. 1.

Euclid. def. 15. l. 1.

tor, ac quassato capite fronteq; caperata negabit huiusmodi figuram reperiri posse, neque si extet signum suo complexu continere à quo eius ambitus paribus vndequaque radijs attingatur. Sed aduocetur linea recta, ac in plano aliquo circa alterum sui extremum tanquam cardinem conuoluatur dum eo vnde motus exordium sumpsit regrediatur: momento circulum efformatum intelligis, ac verticem immobilem circa quem designatrix linea conuersa est centrum non dubitas affirmare, à quo omnes rectas ad peripheriam æquales ideo audacter pronuncias, quod singulæ cum linea mota coincidant, ideoque cum ei, tum inter se, quod ex primo pronunciato constat, sint æquales. Neque aliter Sphæræ faces præfert motus, cum manente semidiametro, semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur vnde moueri cęperat, circum assumpta figura: aut Cono, quando trianguli rectanguli manente vno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum reuertitur: aut Cylindro quando motu parallelogrammi eodem modo procreatur. Denique nulla est figura licet aut compositione fiat, aut sectione cuius veritatem præcedens aliquis motus non afferat. Et certe, quod mirum est, hæc ad verbum Platonis sententia esse videtur in eo quem supra produximus ex 7. de Republica, loco, cum ait fieri non poße vt Geometria eiusque Comites quidquam videant dum suppositionibus vtentes eas immobiles relinquunt, earum rationem reddere minime valentes: quasi dicere velit tum demum futurum vt videant cum suas ὑποθέσεις seu suppositiones (ita definitiones vocantur) mobiles effecerint, easque demum rationem antea ignotam facile reddituras. Neque eam tantum Matheseos partem quæ in contemplatione versatur illustrat intelligibilis hic motus, sed & ei quæ veluti effectione quadam perficitur adeo neceßariam operam nauat, vt sine ea cōstare nulla ratione possit. Quod enim Problema intelligi, ne dum solui queat in quo aut rectæ a signo ad signum non moueantur, aut in infinitum producantur, aut ad certos angulos inflectantur, aut additione vel subtractione augeantur minuaturue, aut in partes secentur, aut alijs huiusmodi Mathematicis motionibus non cieantur? Vides igitur vt non tantum in Physicis. sed etiam in Mathematicis motus fidissimi indicis instar latentes veritatis recessus explorat, eoque vacillantem animum veluti manu ducit: atque vt illic ex Philosophi decreto ignorato motu, naturæ ignoratio sequitur, isque est qui primum rerum omnium motorem, puram cœlestium orbium ἐντελέχειαν, elementorum in mutuas transformationes propensionem accuratè peruestigat, atque admirabilem

Euclid. def. 14. 18. 21. lib. 11.

lem illum Protheum varijs accidentium laruis, ac omnigena aſpectus mutatione menti illudentem depræhendit, formæque ſuæ redditum in intellectus aſpectum producit; ita in Mathematicis tanquam ductarius funis cogitationis trochleæ circumuolutus latentem in imo Democriti puteo rerum Geometricarum veritatem expiſcatur ac tantum non corporis oculis ſpectandam in apertam demonſtrationum lucem educit.

Sed aduerte mi lector duplicem fieri in plano motum (Mathematicum hic ſemper intelligimus, non phyſicum à quo matheſis penitus ſeiuncta eſt) alium qui non tantũ fieri poſſe ſed quomodo fieri poſſit intelligitur aut citra demonſtrationẽ, aut præcedentis alicuius demonſtrationis præſidio, alium qui fieri quidem poſſe deprehenditur, ratio tamen qua fiat non apparet. Exempli loco, lineam rectam circa alterum ſui extremum moueri, ac circulum delineare poſſe, idq; quo pacto fiat ſtatim intelligis; duas vero rectas ita moueri poſſe vt in perpetuo vtriuſque augmento eadem vtriuſq; analogia ſeruetur non percipis, niſi problemate 4. ſexti elementorum informatus quo tribus datis rectis lineis quarta proportionalis inuenitur. Rurſus in deſcriptione lineæ Quadrantis quam teste Pappo lib. 4. collectionum Mathematicarum Dinoſtratus ac Nicomedes alijque iuniores ad circuli τετραγώνυσμον *excogitarunt facilè percipis fieri poſſe, vt qua proportione recta rectã, eadem recta circularem ſecet, qua vero ratione id fieri queat non intelligis; cum nondum eo Geometriȩ inuentum peruenerit, vt tribus datis lineis rectis quartam proportionalem circularem reperire valeat. Poſtremum hunc motum, quæque ex eo procreantur, figuras inter Geometricas non auſim recenſere, cum non conſtet num ex Geometriæ fontibus deriuari poſſint. In ijs tamen non ſine magno fructu, ac iucunditate verſati ſunt grauiſſimi authores, earumque proprietates quibuſdam ſuppoſitis demonſtrarunt vt lineæ Conchyliatæ Nicomedes, Volutæ Archimedes, Quadratricis Dinoſtratus, Hæderiformis ac Clypearis Geminus, Paradoxæ Menelaus, Spiricarum Perſeus, noſque ſequenti libro de earum nonnullis nouas affectiones demonſtrabimus. Primum vero motum & qualemcumque enatam ex eo formarum ſobolem Geometricæ familiæ annumerandum eſſe conſtanter affirmo. Quid ni? cum motus ipſe Geometricus ſit, & figura quam progenuit per Geometricas* ἀποδείξεις *Geometrici generis eſſe comprobetur, niſi velis contendere eum in hoc album referendum non eſſe cuius* γένεσις *non ſtatim, ac primo intuitu vt circuli, ſed de-*

Proclus & Pappus.

monstrationum velut adhibito collyrio appareat. Itane? ergo nihil in Geometria Geometricum præter hypotheses, petitiones, ac dignitates censendum erit, cum reliqua omnia demonstrationum adminiculo comparentur. Quid? quod Demonstrationes id nominis maiori iure quam principia ipsa sibi vendicare videntur? Scientia est Geometria, ratiocinatrix igitur ac discursiua, quæcunque ergo discursu ab ea procedunt maiori similitudine Genitricem referunt, quam definitiones illæ, atque effata quæ natales suos primæ aut secundæ mentis operationi acceptam ferunt.

Pappus lib. 3. ad proposit. 4. & lib. 4. ad proposit. 30.

Sed quorsum tam multa, mi lector? Problematum antiqui tria genera statuerunt, & eorum alia plana seu Geometrica, alia solida, alia linearia appellari. Quæ igitur per lineas rectas, & circuli circumferentiam solui poßunt plana ideo dicuntur, quod lineæ per quas soluuntur in plano ortum habeant: quæ vero enodantur aßumpta in constructionem coni sectione solida nuncupantur, quod solidarum figurarum superficies, conicas nimirum adhibeant. Denique cum præter dictas lineas aliæ assumuntur varium ac trasmutabilem ortum habentes quæque ex inordinatis superficiebus & motibus implicatis fiunt, quales sunt Helices & quas Græci τετραγωνίζουσας *appellant, tertium genus existit quod lineare vocitatur. Ego vero in quinto hoc libro, nouo vt reor inuento, sectiones omnes conicas Ellipsim, Parabolam, Hyperbolam in plano motu lineæ rectæ quæ subtensæ in circulo continuo sit aut æqualis aut proportionalis describo, varias earum affectiones atque analogias demonstro. Eas igitur figuras Geometricas esse & quæ de ijs traduntur siue Theoremata siue Problemata certissima eße, nec solidis tantum sed etiam planis ac Geometricis enumeranda eße contendo cum motu, circulo, & lineis rectis non tantum in plano delineentur, sed & earum affectiones omnes comprobentur. Vt ideo Pappo Alexandrino amplius aßentiri non poßim dum erroris arguit Geometras qui Problema planum per conica expediunt, quasi ex improprio genere media depromant atque ineptis instrumentis minimeque conuenienti materia eius substructionem moliantur. Sed fiunt sectione corporum solidorum? Quid tum? fit & triangulum sectione Coni per verticem; parallelogrammum describitur sectione cylindri per axem: Circulus vtriusque sectione aut basi æquidistante, aut sub contrarie posita, aut globi qualicumque delineatur, ideo ne igitur plana ac Geometrica de ijs Theoremata ac Problemata non sunt quod etiam solidorum* τομῇ *describantur? At forsan vrgebis ideo Geometrica*

Apoll. 3. lib. 1. conic.
Seren. p. 2. de sectione cylindri.
Apoll. 5. p. lib. 1. conic.

metrica non eſſe quod earum definitiones in Geometricis elementis non tradantur: quaſi vero nihil Geometricum cenſendum ſit præter elementa: Annon idem hoc ac ſi quis aſſerat nihil in phyſicis naturale eſſe quod elementum non ſit? Cur vero antiqui Geometræ admirati mirificas Theorematum conicorum demonſtrationes ab Apollonio Pergæo prolatas illi magni Geometræ agnomen indidiſſent; niſi materiam in qua verſabatur Geometricam iudicaſſent? Ex his efficio Problema quo inter duas datas rectas duæ mediæ proportionales à Menæchmo (quem conicarum ſectionum authorem Proclus facit) per duas parabolas ſe ſe in puncto ſecantes inueniuntur, quod octauum eſt apud Eutocium in 2. Archimedis de ſphera & cylindro, & planum eſſe, & Geometricum, ideoque cubi duplicationem Geometrice eſſe repertam. Neque vero hic quis opponat punctum in quo geminæ illæ parabolæ coeunt non aſſignari, neque enim id magis requirendum eſt, quam vt in primo apud Euclidem Problemate punctum in quo duo circuli ex duobus datæ rectæ lineæ extremis deſcripti ſe ſe ſecant alio modo quam ipſa circulorum deſcriptione deſignetur. Quod ſi vlterius ineptiat, ac dicat ideo punctum illud apud Euclidem non aſſignari quod vno circini circumductu aperte determinetur, quod in parabolis fieri non poteſt, an non animaduertit quantam iniuriam matheſi inferat, cum eam ſordida mechanicorum inſtrumentorum tractatione infamat, ac eius nobilitati humilis artis exercitio notam inurit? Sed ſi hoc velit, nos quoque organon inueniemus quo perpetuo ductu Parabola delineetur. Eutocius in ſecundum Archimedis de ſphæra & cylindro meminit inſtrumenti cuiuſdam ad ſimilitudinem Græci λαμβδα conformati, quo ſectio coni rectanguli, ſeu Parabola deſcribitur, eiuſque inuentionem Iſidoro cuidam Mileſio mechanico magiſtro ſuo attribuit, qui illud etiam in commentarijs camaricarum Heronis deſcripſerit. Ratum igitur eſto, figuras haſce licet coni ſectione etiam fiant alterius nihilominus generis etiam eſſe: cumque motu poſſibili progignantur, vere & exiſtere & ex motu illo definiri poſſe: iſque cum Geometricus ſit, eas quoque Geometrico Schematum ordini inſerendas eſſe: denique cum in plano per circulum & lineas rectas deſcribantur, in planis cenſenda eſſe quæcumque de illis Theoremata ac Problemata procuduntur. Sed de his hactenus.

Seren. 5. & 6. de ſectione cylindri. Theodoſ. prop. 1. primiſpheric. Eutocius in primum Conic. initro.

Nos totum hunc librum ſectionibus conicis tribuemus, earum genus in plano ex circulo per motum manifeſtum deducemus, varias earum ἰδιότητας inueſtigabimus, nonnullas etiam analogias, ſed veluti per

transſennam, indicabimus, vberiorem enim de ijs tractationem in eum librum reijcimus quem de dimenſione & quadratura Hyperbolæ, Deo fauente, edituri ſumus, quem peculiarem ideo eſſe voluimus, vt nouum inuentum ab aliorum conſortio ſegregatum intentius ſpectetur & maiori cum admiratione, legentium in ſe animos conuertat. Præmittimus autem aliquot definitiones tum vt noua nonnulla quæ nos reperimus, explicemus; tum vt moleſtas circumlocutiones, quæ paſſim vſurpandæ eſſent, euitemus.

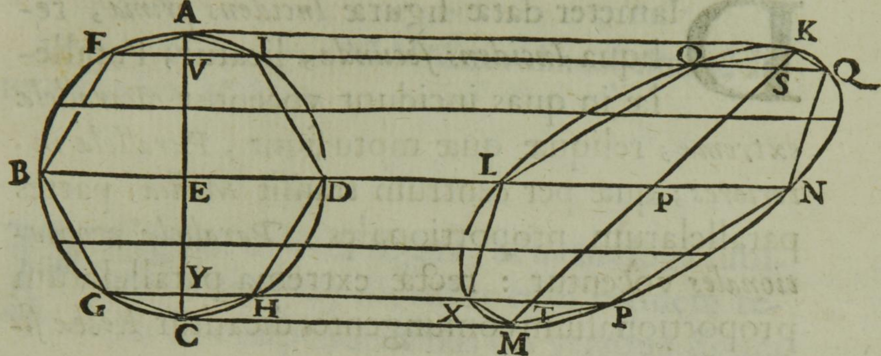
DEFINITIONES.

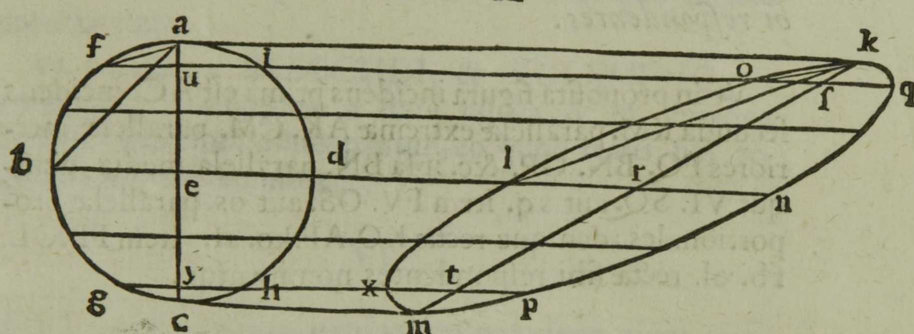
I.

SI duabus rectis parallelis recta occurrat, quæ ſit diameter alicuius figuræ intra parallelas contentæ; & in eaſdem aut alias parallelas alia recta incidat, vnaque aut duæ parallelæ ex eadem in eandem partem ità moueantur alteri continuò parallelæ, vt illa ſuam diametrum, iſta ſuam incidentem eadem ratione diuidant; & partibus parallelæ quæ à figuræ peripheria circa diametrum comprehenduntur partes alterius parallelæ circa ſuam incidentem ſint proportionales: dicatur ille *Motus ad datam figuram inter duas parallelas æquidiſtanter proportionalis*.

SINT duæ rectæ parallelæ AK. CM. in quas incidat recta AC. quæ ſit diameter cuiuſcumque figuræ, vt verbi gratia, circuli intra dictas parallelas contenti: & in eaſdem aut alias parallelas AK. CM. alia recta MK. incidat, vnaque

que parallela vt AK. in prima figura, aut AK. in prima, & ak. in ſecunda ita moueantur alteri CM. aut cm. conti-





nuo parallelæ vt AK. ſuam diametrum AC.& incidentem KM. in partes eiuſdem rationis diuidant aut in quam rationem recta AK. rectam AC. aut KM. in eaſdem recta ak. ipſam ac. aut km. ſecet: ſintque partibus ipſius parallelæ VF. VI. circa diametrum, partes SO. SQ. aut so. sq. circa incidentem KM. aut km. Item partes BE. ED. ipſis LR. RN. aut lr. rn. & GY. YH. ipſis HT. TP. aut ht. tp. atque ita continuo in reliquis, proportionales; motum illum linearum AK. ak. vocabimus ad datam figuram, vt hic ad datum circulum inter duas parallelas (ſiue illæ eadem, ſint ſiue diuerſæ) æquidiſtanter proportionalem.

Dia-

II.

DIameter datæ figuræ *Incidens prima*, reliqua *Incidens secunda*, dicatur; Parallelæ in quas incidunt vocentur *Parallelæ extremæ*; reliquæ quæ motu fiunt, *Parallelæ interiores*; quæ per centrum transit *Media*; partes parallelarum proportionales, *Parallelæ proportionales* vocentur: rectæ extrema parallelarum proportionalium coniungentes dicantur *Rectæ sibi respondentes*.

Vt in proposita figura incidens prima est AC. incidens secunda KM. parallelæ extremæ AK. CM. parallelæ interiores FQ. BN. GP. &c. ipsa BN. parallela media, denique VI. SQ. aut sq. item FV. OS. aut os. parallelæ proportionales; denique rectæ KO. AF. ko. af. Item FB. OL. fb. ol. rectæ sibi respondentes nominentur.

III.

MOtus in quo parallelæ proportionales etiam æquales sunt dicatur *Motus ad datam figuram inter duas parallelas æquidistanter ac æqualiter proportionalis*: si vero parallelæ proportionales sint inæquales, *Motus inæqualiter proportionalis*.

IV.

SI vero parallelæ proportionales quæ circa incidentem secundam mouentur, figuram suis

ſuis extermis deſcribant, ea vocetur *Figura ad datam Analoga*.

Vt in propoſito figura KLMN. aut klmn. dicitur ad datum circulum analoga.

V.

POlygona in data figura, & in analoga ſimiliter deſcripta, dicuntur cum totidem rectis ſibi reſpondentibus, in vtraque figura continentur.

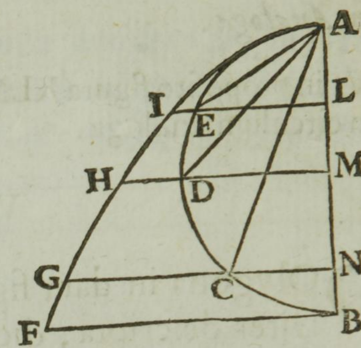
Vt polygona AFBGCHDI. & KOLXMPNQ. & kolxmpnq. polygona in data figura, & in analoga ſimiliter deſcripta nuncupantur, eo quod rectis ſibi reſpondentibus terminentur.

VI.

SI in circulo, chordarum maxima circa verticem figuræ ita conuertatur vt continuo peripheriam in puncto ſecet, per quod tranſiens recta quæpiam ita moueatur vt cum diametro per verticem tranſeunte æquales angulos faciat, ſeu continuo parallelas delineet, eaſque chordis inter verticem & peripheriam interceptis proportionales: deſcribet dicta parallela altero extremo lineam curuam ac figuram quam vocemus Conicoides primum.

Vt

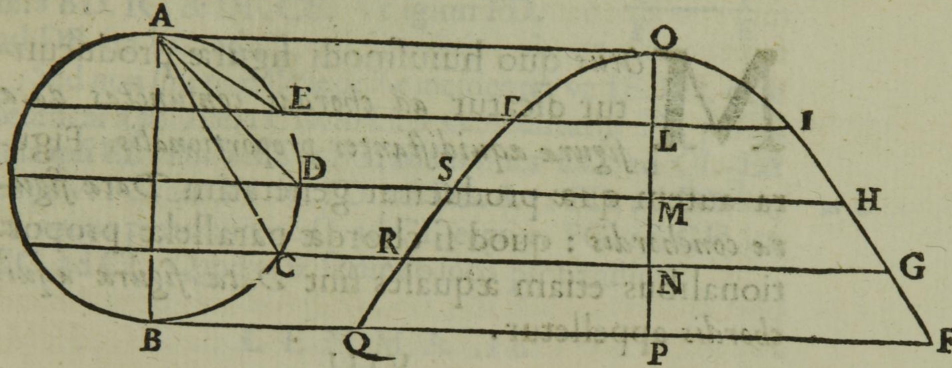
Vt sit circulus ADB. cuius vertex A. diameter AB. maxima chorda AB. quę circa alterum diametri extremum seu verticem A. ita circumagatur vt peripheriam continuo secet verbi gratia in punctis B. C. D. E. per quæ transeat FB. ac ita sursum moueatur vt cum AB. faciat angulum quemcumque FBA. ac motu parallelo delineet rectas parallelas GN. HM. IL. proportionales chordis AB. AC. AD. AE. nempe vt AB. ad AC. ita sit FB. ad GN. & vt AC. ad AD. ita GN. ad HM. & vt AD. ad AE. ita MH. ad IL. procreabit dicta linea FB. altero extremo F. lineam curuam FGHIA. quam *Conicoides primum* liber appellare tantisper dum eius naturam inuestigauerimus.



EAdem figura producetur si intra duas parallelas duæ incidentes ducantur rectæ, quarum prima sit perpendicularis, secunda quemlibet angulum cum ijs constituat; ac circa perpendicularem circulus describatur; moueaturque altera parallelarum ita vt alteri parallelæ semper æquidistet, ac partes eius circa secundam incidentem proportionales sint chordis quæ a puncto circuli vnde moueri cæpit ad punctum vbi parallela circuli peripheriam secat ducuntur, describetur circa secundam incidentem linea curua, ac figura quam volumus *Conicoides primum vocitari*.

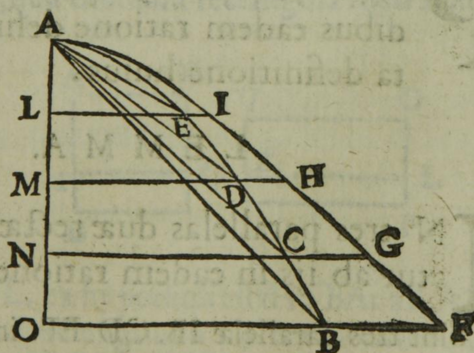
Vt

Vt si sint duæ parallelæ AO. BP. ad quas AB. prima incidens sit perpendicularis, circa quam circulus descriptus sit ADC. secunda incidens OP. cum dictis parallelis



quemlibet angulum faciat; moueatur autem AO. ipsi BF. æquidistanter, ita vt tam LI. quam LT. ipsi AE. chordæ, item MH. MS. chordæ AD. ac sic deinceps sint æquales describetur linea curua ac figura FOQ. quæ *Conicoides primum* dicatur.

Iam vero si ijdem motus fiant in Conicoide primo AOB. vbi chordarum maxima AB. circa verticem A. ita conuertatur vt lineam curuam continuo secet, in punctis B. C. D. E. & recta FO. ita sursum æquidistanter moueatur vt transeat per puncta F. G. H. I. faciatque lineas parallelas FO. GN. HM. IL. ipsis AB.



AC. AD. AE. proportionales describet extremum F. lineam curuam AIHGF. quæ vocetur *Conicoides secundum*.

Atque eadem ratione circa Conicoides secundum ijsdem motibus producetur *Conicoides tertium*, & ita deinceps in infinitum.

VII.

Motus quo huiusmodi figuræ producuntur dicatur *ad chordas coniunctas datæ figuræ æquidistanter proportionalis*. Figura autem quæ producitur generatim *Datæ figuræ conchordis*: quod si chordæ parallelæ proportionalibus etiam æquales sint *Datæ figuræ æquichordis* appelletur.

VIII.

INcidentes prima & secunda: *Parallelæ extremæ interiores*, *media*: *Rectæ sibi respondentes* eodem modo dicantur quo in secunda definitione.

IX.

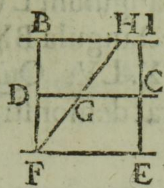
Polygona similiter descripta, in figuris conchordibus eadem ratione definiantur qua quinta definitione huius.

LEMMA. I.

IN tres parallelas duæ rectæ incidentes secantur ab ijs in eadem ratione.

Sint tres parallelæ IB. CD. EF. in quas incidant duæ rectæ ICE. BDF. aut ICE. HGF. ita vt a tribus illis parallelis secentur in I. C. E. & B. D. F. & H. G. F. sintque primum

mum IE. BF. parallelæ. Dico esse vt FD. ad DB. ita EC. ad CI. cum enim parallelæ sint IB. EF. parallelogramma erunt ID. CF. æqualia igitur aduersa latera BD. IC. & DF. CE. Vt igitur FD. ad DB. ita EC. ad CI.



34. 1.

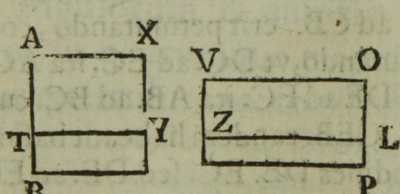
Sed non sint parallelæ dictæ incidentes vt IE. FH. quæ secentur a parallela CD. in C. & G. & ducatur FB. parallela ipsi EI. Dico esse vt FG. ad GH. ita EC. ad CI. Est enim vt FG. ad GH. ita FD. ad DB. & vt FD. ad DB. ita, ex prima parte huius EC. ad CI. ergo vt FG. ad GH. ita EC. ad CI. Quod erat secundo loco probandum.

2. 6.

LEMMA II.

SI duorum rectangulorum æqualium quælibet latera proportionaliter diuidantur: rectæ per illa puncta perpendiculares rectangula in partes inuicem æquales diuidunt.

Sit rectangulum BX. rectangulo VP. æquale, & fiat vt BT. ad TA. ita PL. ad LO. ducanturque TY. ZL. ad AB. OP. perpendiculares, quæ diuidant rectangula illud in alia duo TX. BY. istud in bina ZO. ZP. Dico rectangulum TX. rectangulo ZO. & rectangulum BY. rectangulo ZP. esse æquale. Vt enim BA. ad AT. ita PO. ad OL. ex hypothesi: sed vt BA. ad AT. ita rectangulum BX. ad rectangulum TX. & vt PO. ad OL. ita rectangulum PV. ad rectangulum LV. vt igitur rectangulum BX. ad rectangulum TX. ita rectangulum PV. ad re-



1. 6.

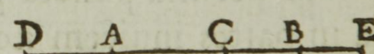
ctangulum LV. & permutando: æqualia autem ponuntur rectangula BX. PV. igitur æqualia etiam sunt rectangula TX. LV. Quare & reliqua BY. PZ. Quod propositum erat demonstrare.

3. pronunc.

LEMMA III.

SI data vtcumque diuidatur, atque ei vtrimque duæ rectæ adijciantur eandem rationem cum partibus quibus cohærent habentes: rectangulum sub data cum adiunctis & altera adiunctarum, ad rectangulum sub parte cohærente cum eadem adiuncta, & adiuncta, est vt data ad partem quæ cum adiuncta cohæret.

Sit data AB. quæ diuidatur vtcumque in C & adijciantur vtrimque duæ rectæ AD. BE. sitque vt AC. ad CB. ita AD. ad BE. Dico rectangulum DEB. (sub data AB. cum adiunctis AD. DE. & adiuncta qualibet BE.) ad rectangulum CEB. (sub parte CB. cum adiuncta & cohærente eadem BE. & adiuncta BE.) esse vt datam AB. ad partem BC. quæ cum adiuncta BE. cohæret. Quoniam est vt DA. ad BE. ita AC. ad CB. erit permutando, componendo, & iterum permutando, vt DC. ad EC. ita AC. ad CB. & componendo vt DE ad EC. ita AB. ad BC. cum ergo duo rectangula DEB. CEB. eandem habeant basim BE. erunt inter se vt altitudines DE. EC. sed DE. ad EC. est vt AB. ad BC. ergo rectangulum DEB. ad rectangulum CEB. est vt AB. ad BC. Quod demonstrandum erat.

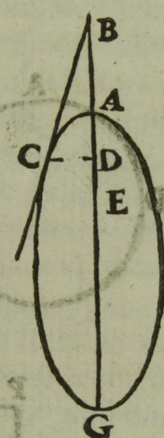


Schol. 1. 6.

LEMMA III.

PEr datum punctum in peripheria ellipsis contingentem lineam ducere.

Sit in peripheria datæ ellipsis ACG. datum punctum C. per quod oportet ducere rectam quæ ellipsin tangat. Inueniatur axis ellipsis GA. ad quem ordinatim applicetur ex puncto C. perpendicularis CD. & rectæ DA. accipiatur æqualis DE. & hac vt GE. ad ED. ita GA. ad AB. & connectatur BC. Dico quod recta BC. tangit ellipsin in puncto C. Nam quoniam est vt GE. ad ED. ita GA. ad AB. erit componendo vt GD. ad DE. id est GD. ad DA. ita GB. ad BA. Quare recta BC. sectionem tangit in C. Igitur per datum punctum in peripheria ellipsis contingentem lineam duximus. Quod erat faciendum.



46.2.Conic.

34.1.Conic.

THEOREMA I. PROPOS. I.

IN circulo, & coni sectione potest describi figura multorum angulorum & numero parium, quæ maior sit quacumque magnitudine minore quam datus circulus, aut coni sectio.

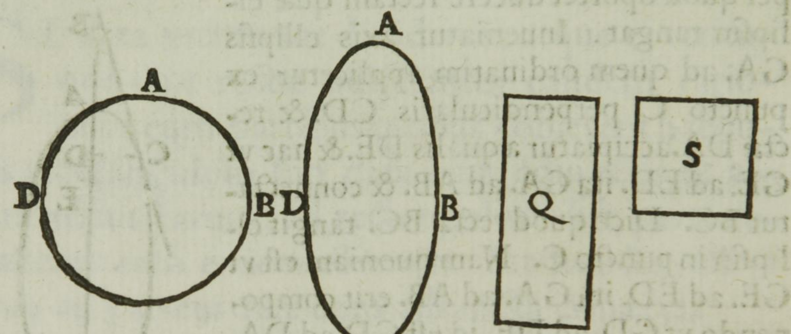
Sit circulus, Ellipsis, Hyperbola, Parabola DAB. & data magnitudo quælibet Q. minor qualibet datarum figurarum. Dico tam in circulo, quam in coni sectionibus posse describi figuram multornm angulorum, & numero parium quæ maior sit data magnitudine Q.

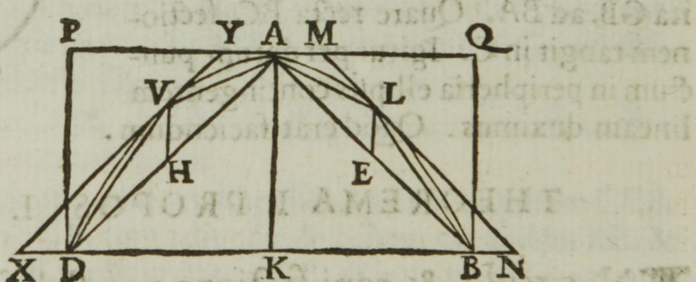
Ac primum in circulo DAB. cum is maior sit magnitudine Q. sit excessus quo dictam magnitudinem superat,

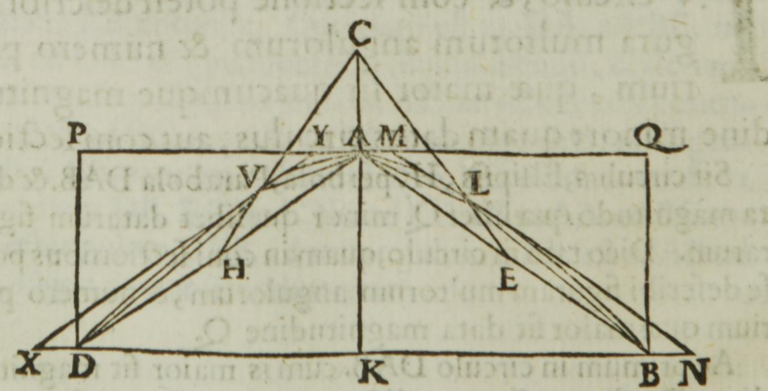
ma-

2. 12.

magnitudo S. constat ex 2. 12. elementorum tantum posse abscindi ex circulo DAB. inscripta figura multorum angulorum, & numero parium, vt relinquatur quoddam spatium minus ipso S. spatium autem illud quod relinquitur est differentia polygoni inscripti & circuli, & magnitudo S. est differentia magnitudinis Q. & circuli; igitur minori







disse-

differentia distat polygonum a circulo quam magnitudo Q. ideoque maius est polygonum, quam magnitudo Q.

Sit secundo ellipsis DAB. maior eadem magnitudine Q. excessu magnitudinis S. manifestum est ex positione Archimedis propositione 5. de Conoidibus & sphæroidibus, sed euidentius, ex Commentarijs Federici Commandini in eandem propositionem, in Ellipsi posse inscribi figuram multorum angulorum, & numero parium cuius residuum seu differentia ad Ellipsim sit minor differentia S. qua eadem Ellipsis superat datam magnitudinem Q. atque adeo polygonum inscriptum esse maius data magnitudine Q.

Sit tertio Parabola aut Hyperbola DAB. cuius diameter AK. basis seu ordinatim applicata DB. vertex A. & in Hyperbola centrum C. Inscribatur triangulum DAB. constat spatium illud maius esse quam sit dimidium spatij sectione DAB. contenti. Nam si per punctum A. duxerimus tangentem PQ. parallelam scilicet ipsi DB. cui occurrant ex D.B. perpendiculares DP. BQ. fiet parallelogrammum DPQB. cuius dimidium est triangulum DAB. spatium vero sectione Parabolica aut Hyperbolica contentum DAC. minus est quam figura quadrilatera circumscripta DQ. Igitur inscripta figura seu triangulum DAB. maius est quã ipsius dimidium. Rursus rectæ DA. BA. bifariam diuidantur in H. & E. & in Parabola sit VH. diametro KA. æquidistans quæ secet parabola in V. & EL. eidem diametro æquidistans secans Parabolam in L. In Hyperbola vero ducantur ex centro C. rectæ CVH. CLE. secantes etiam Hyperbolam in V. & L. manifestum est ex conuertentibus 46. & 47. 1. Conicorum, lineas YVX. & MLN. tangentes sectiones in V. L. & ipsi DB. PQ. occurrentes in punctis Y. X. & NM. ipsis DA. BA. æquidistare: ideoque parallelogramma esse XA. NA. quare ductis rectis AV. VD. & AL. LB. erit AVD parallelogrammi XA. & ALB. parallelogrammi NA. dimidium, & ob id maius quam dimidium portionis Parabolæ vel Hyperbolæ quæ

17.1.Conic.

41. 1.

Conuert.46. 47.1.Conic.

41. 1.

circa

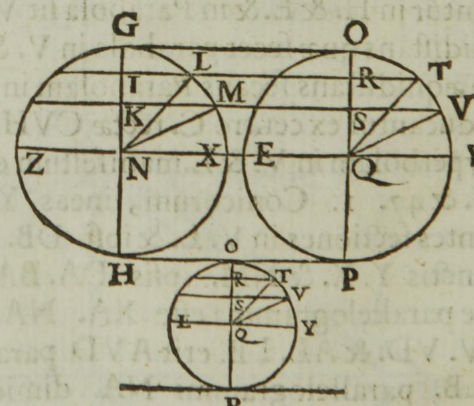
circa ipsum describitur. Atque idem demonstrabitur in alijs triangulis in infinitum: quod quidem semper fiat dum relinquantur quædam sectionum portiones quæ sint minores excessu S. quo Parabola vel Hyperbola datam magnitudinem Q. superat: rursus enim vt in priori parte huius sequetur, Parabolam vel Hyperbolam minori excessu differre a polygono inscripto quam à magnitudine Q. ideoque polygonum esse maius data magnitudine Q. Igitur in circulo & coni sectione potest describi &c. Quod erat demonstrandum.

1. 10.

THEOREMA II. PROPOS. II.

POtest ad datum circulum motus æquidistanter proportionalis ita fieri, vt partes proportionales incidentium partibus parallelarum proportionalium quæ illas secant sint proportionales.

Inter duas parallelas GO. HP. ducatur incidens perpendicularis GH. circa quam centro N. descriptus sit circulus GLM. ac inter easdem parallelas, aut diuersas HP. CF. ducatur alia incidens perpendicularis OP. moueatur GO. paraλληλῶς ipsi HP. ita vt perueniat ad puncta I. & K. in incidente GH. & ad puncta R. S. in incidente OP. quæ est inter easdem parallelas, secetque circulum in punctis L. M. constat ex Lemmate 1. huius duas GH. OP. secari, a parallelis IR. KS. propor-



tionalirer: aut si non sit inter easdem parallelas, sint sectæ GH. OP. in eadem ratione, in I. K. & R. S. ac moueatur GO. parallela ita vt quo tempore G. peruenit in I. etiam O. perueniat in R. & cum illa in K. ita progrediatur in S. Diuisa bifariam OP. in Q. describatur centro Q. circulus OTV. quem secent parallelæ IR. KS. productæ in punctis T. V. & connectantur QT. QV. Item NL. NM. Dico motum lineæ GO. versus HP. aut linearum GO. HP. esse motum ad datum circulum GLM. æquidistanter proportionalem, ita vt quæ proportio est HI. partis incidentis ad IL. tangentem quæ illam secat, eadem sit PR. partis proportionalis incidentis ad RT. tangentem proportionalem. Cum enim sit positione vt HI. ad IG. ita PR. ad RO. erit componendo vt HG. ad IG. ita PO. ad RO. & antecedentium dimidia, vt NG. ad IG. ita QO. ad RO. & per conuersionem rationis vt GN. hoc est LN. ad NI. ita OQ. id est TQ. ad QR. Cum ergo in triangulis LIN. TRQ. anguli ad I. R. sint recti, ac proinde reliquorum angulorum L. T. vterque minor recto, erunt triangula NIL. QRT. æquiangula angulosque æquales habebunt ILN. RTQ. & INL. RQT. Erit igitur vt NI. ad IL. ita QR. ad RT. Cum ergo ex hypothesi sectæ sint GH. OP. a parallelis in eadem ratione, erit vt HI. ad IN. ita PR. ad RQ. & vt IN. ad IL. ita ostensum est esse QR. ad RT. igitur ex æquali, vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. atque eodem modo probabimus æquiangula esse triangula KNM. SQV. & angulos KMN. SVQ. & KNM. SQV. esse æquales, item esse vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. Cum igitur æquiangula sint triangula LIN. TRQ. & anguli ad L. T. æquales erit vt NL. id est GN. ad LI. ita TQ. id est OQ. ad TR. & permutando vt GN. ad OQ. ita IL. ad TR. atque eodem modo ex triangulis æquiangulis NKM. QSV. ostendemus esse vt GN. ad OQ. ita KM. ad SV. ergo vt IL. ad RT. ita KM. ad SV. & permutando vt IL. ad KM. ita RT. ad SV. Cum ergo recta GH. duabus rectis

Corol. 1. 17.
7. 6.
4. 6.

4. 6.

11. 5.

parallelis GO. HP. occurrat, ac sit diameter circuli intra parallelas contenti, & in easdem, aut alias HP. CF. alia recta OP. incidat, moueaturque aut vna parallela GO. aut duæ GO. HP. ex eadem in eandem partem, vt alteri HP. aut CF. sint continuo parallelæ, diuidantque GH. & OP. in easdem rationes, & partes parallelarum IL. KM. partibus RT. SV. sint proportionales, constat ex prima definitione huius, motum illum esse ad datum circulum inter duas parallelas æquidistanter proportionalem, cumque sit vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. item vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. patet id quod proponebatur.

1. defin. huius.

COROLLARIVM.

Manifestum est ex dictis in propositione, si duo circuli inter duas parallelas æqualiter aut inæqualiter distantes descripti fuerint, & puncta contactus diameter coniungat, per quæ parallelæ ducantur quarum altera versus alteram in vtroque circulo ita moueatur vt partes ex diametris eiusdem rationis abscindat: primo arcus quos in motu abscindunt continuo esse similes, secundo esse vt sinus seu chordas arcuum in vno circulo, ita sinus & chordas in altero circulo; denique esse partes incidentium ad partes parallelarum in vno circulo vt in alio: seu esse sinus versos ad sinus rectos in eadem proportione in vtroque circulo. Nam ex eo quod parallelæ GO. HP. motu secent diametros GH. OP. in easdem rationes in circulis GLM. OTV. probatum est angulos INL. RQT. item KNM. SQV. esse æquales, quare arcus GL. OT. item arcus GM. OV. similes sunt: præterea ostensum est esse vt IL. ad KN. ita RT. ad SV. denique vt HI. ad IL. ita PR. ad RT.

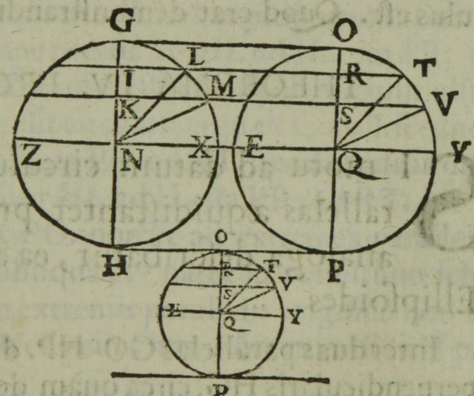
Schol. 22. 3.

THEO-

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI ad datum circulum motu æquidiſtanter proportionali figura analoga deſcribatur, ita vt partes proportionales incidentium partibus parallelarum proportionalium quæ illas ſecant, ſint proportionales: figura analoga circulus erit.

Sit eadem ſyntheſis quæ in ſuperiori propoſitione, idemque ſchema, nempe inter duas parallelas GO. HP. ducatur incidens perpendicularis GH. circa quam centro N. deſcriptus ſit circulus GLM. ac inter eaſdem parallelas, aut diuerſas HP. CF. ducatur alia incidens perpendicularis OP. Moueatur GO. æquidiſtanter ipſi HP. ita vt perueniat ad quælibet puncta I. K. N. in incidente GH. & ad puncta R. S. Q. in incidente OP. quæ eſt inter eaſdem parallelas,



ſecetque circulum in punctis L. M. X. conſtat ex Lemm. 1. huius duas GH. OP. ſecari a parallelis IK. KS. proportionaliter: aut ſi non ſit inter eaſdem parallelas, ſint rectæ GH. OP. ſectæ eadem ratione in I. K. N. & R. S. Q. &c. moueatur HO. parallela, ita vt quo tempore G. peruenit in I. etiam O. perueniat in R. & cum illa in K. iſta progrediatur in S. cum illa in N. centrum, hæc in Q. & parallelæ

RT. SV. QY. parallelis IL. KM. NX. sint proportionales, (qui motus primæ definitioni congruit) sitque vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. & vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. (hoc enim fieri posse in superiori propositione ostensum est) describaturque figura OTV. Dico figuram OTV. esse circulum. Cum enim motu æquidistanter proportionali sectæ sint proportionaliter HG. PO. erit vt NI. ad HI. ita QR. ad PR. sed vt HI. ad IL ita supponitur PR. ad RT. ergo ex æquali vt NI. ad IL. ita QR. ad RT. quare cum recti sint anguli ad IR. æquiangula erunt triangula LNI. TQR. vt igitur LN. ad NI. ita TQ. ad QR. & vt NI. ad NG. ita QR. ad QO. ex descriptione, ergo ex æqualitate, vt LN. ad NG. ita TQ. ad QO. æquales autem sunt LN. NG. æquales igitur sunt QT. QO. Atque eadem ratione ostendentur æquales VQ. QO. & quotquot ex Q. puncto ad perimetrum OTV. ducentur. Igitur figura OTV. circulus est. Quod erat demonstrandum.

1. definit. huius.
6. 6.
4. 6.
defin. 1. huius.
15. defin.
15. defin.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

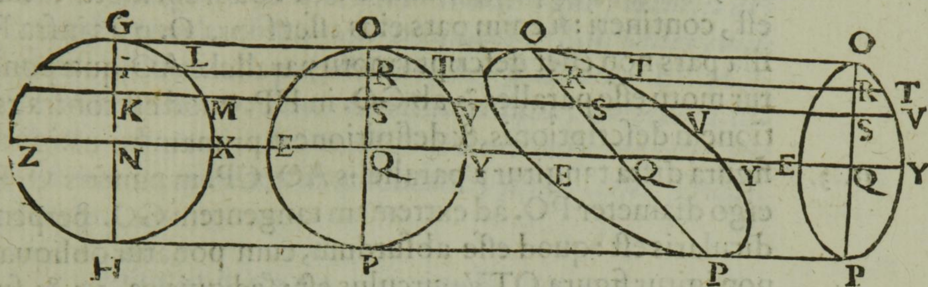
SI motu ad datum circulum inter duas parallelas æquidistanter proportionali figura analoga describatur, ea aut circulus erit, aut Ellipsoides.

Inter duas parallelas GO- HP. ducta sit ad vtramque perpendicularis HG. circa quàm descriptus sit centro N. circulus GLM. ac inter easdem aut diuersas parallelas circa incidentem secundam OP. motu ad circulum GLM. proportionali descripta sit figura analoga OTV. Dico illam figuram aut esse circulum, aut Ellipsoides.

Sit primum incidens OP. peependicularis ad extremas parallelas (vt patet in secunda & quarta figura) & ducantur quælibet IL. KM. NX. parallelæ interiores in circulo GLM. quibus in figura OTV. respondeant proportionales

tionales

tionales parallelæ RT. SV. QY & ſint etiam primo partes 2. huius.



incidentium proportionales, partibus parallelarum proportionalium proportionales, nempe vt HI.ad IL.ita PR. ad RT. & vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. erit figura OTV. cirulus. 3. huius.

Sit ſecundo OP.perpendicularis ad extremas parallelas, ſiue illæ eædem ſint ſiue diuerſæ, ſed partes incidentium proportionales partibus parallelarum proportionalium analogæ non ſint, nempe non ſit vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. Dico figuram OTV. non eſſe circulum. Si enim aliter aſſeratur, ſit ſi fieri poſſit circulus, ergo ex Coroll.ſecundæ huius erit vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. quod eſt abſurdum ponitur enim non eſſe vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. Corol. 2. huius.

Denique incidens PO. non ſit ad extremas parallelas perpendicularis ſed obliqua, vt patet in penultimo ſchemate, faciatque cum extremis parallelis angulos non rectos. Dico illam non eſſe circulum. Sit enim ſi fieri poteſt circulus.

Quoniam rectæ PQ. QO. rectis æqualibus HN. NG. proportionales ſunt, etiam inter ſe ſunt æquales, & rectæ EQ. QY. rectis ZN. NX. æqualibus proportionales, etiam ſunt æquales, centrum igitur circuli eſt punctum Q. (ſi enim centrum non eſſet duæ rectæ EY. OP. ſeſe mutuo ſecantes non per centrum extenſæ ſeſe mutuo bifariam non ſecarent, quod eſt abſurdum, cum probatum ſit eas ſeſe bifariam ſecare) eiuſque diameter PO. Rurſus manife- 4. 3.

nifestum est figuram analogam OEPY; quæ circulus dicitur, totam intra parallelas AO. CP. quorum motu facta est, contineri: si enim pats eius esset supra O. pars infra P. illa pars non esset descripta motu parallelæ AO. quæ ponitur motu esse parallελῶς ab GO. in HP. quod est contra rationem descriptionis, & definitionem primam huius: igitur figura dicta tangitur a parallelis AO. CP. in punctis O. P. ergo diameter PO. ad extremam tangentem GO. perpendicularis est: quod esse absurdum, cum ponatur obliqua; non igitur figura OTV. circulus est: sed quia ea, vt & superiores quæ circuli non sunt paulatim a puncto O. dilatantur vsque ad parallelam mediam EY. hinc rursus coarctantur dum in punctum P. desinant & claudantur, formam ellipsis præseferunt, quapropter figuram hanc, donec naturam eius explorauerimus, vocabimus *Ellipsoides*.

18. 3.

Igitur si motu ad datum circulum &c. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

Hinc constat si motus sit huiusmodi qualis describitur tertia huius, figuram analogum esse circulum; secus nunquam esse circulum; & incidente ad extremas parallelas existente obliqua, figuram analogam circulum non esse.

SCHOLIVM, AC DEFINITIONES secundæ.

Figura analoga quæ motu ad circulum æquidistanter proportionali procreatur, aut Circulus est aut Ellipsoides: circulus aut intra easdem parallelas aut intra diuersas: si intra easdem parallelas producatur, patet esse dato æqualem, cum æqualem dato diametrum habeat; si intra diuersas & maior & minor esse potest. Rursus ellipsoides aut inter easdem parallelas continetur, aut diuersas; & vtroque modo

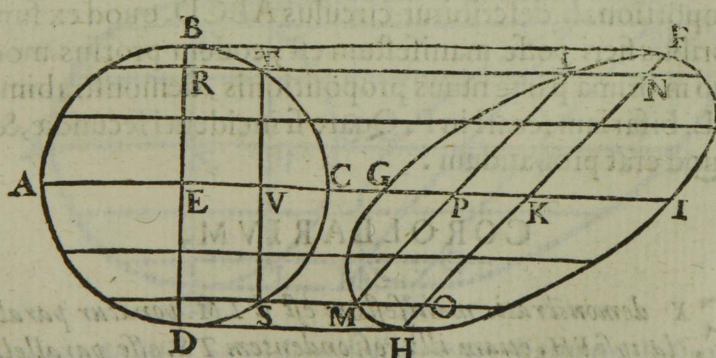
aut

aut incidentem ad extremas parallelas rectam habet, aut obliquam; ac denique parallelas proportionales aut parallelis dati circuli æquales habet, aut inæquales. Ellipſoides cuius incidens ad extremas parallelas recta eſt dicatur Ellipſoides rectum*: id vero cuius incidens obliqua, vocetur* Ellipſoides obliquum. *Si parallelæ proportionales æquales ſint appelletur* Ellipſoides Æquichorde; *ſi inæquales* Diuerſichorde.

THEOREMA V. PROPOS. V.

SI incidenti ſecundæ parallela intra ellipſoides ducatur: ea à parallela media bifariam ſecabitur.

Deſcribatur circulus ABCD. ac ellipſoides quodcumq; FGHI. modo in prima definitione huius tradito; ſiue inter eaſdem parallelas BF. DH. ſiue diuerſas; at ſint primum inter eaſdem, ſitque incidentium prima BD. ſecunda FH. illa diameter circuli ad BF. recta; ita aut recta aut obliqua;



parallelarum media EK. tranſiens per centrum circuli E. & ipſam FH. ſecans in K. peripheriam circuli in C. ellipſoidis in G. ipſi autem FH. parallela ducatur LM. ſecans periocham ellipſoidis in punctis L. M. & parallelam mediam

in

in puncto P. Dico rectam L.M. à recta KE. bifariam secari in P. Ducantur per puncta L.M. duæ parallelæ interiores IN. MO. proportionales parallelis in circulo RT. QS. quarum illæ incidentium secundam secent in N.O. istæ circuli diametrum in R. Q. peripheriam in T.S. & iungatur TS. secans EK. in V. Quoniam parallelæ sunt ON. ML. ex hypotesi: item LN. MO. ex definitione prima huius, seu descriptione ellipsoideos, parallelogrammum est LMON. quare æqualia sunt aduersa latera MO. LN. Sed MO. LN. sunt parallelæ proportionales ipsis QS. RT. ex definit. 1. huius: æquales igitur sunt QS. RT. sed sunt & parallelæ, ex eadem definit. Igitur etiam parallelæ sunt BD. TS. Igitur anguli BEV. & TVE. sunt æquales; ille autem rectus est ex definitione 1. huius; quare & iste rectus est, secatque EV. rectam TS. bifariam in V. vt autem SV. ad VT. ita MP. ad PL. Igitur etiam recta ML. diuiditur bifariam in P. atque idem demonstrabitur de qualibet alia parallela ipsi FH.

Definit. 1. huius. — Definit. 35. — 34. 1. — 33. 1. — 29. 1. — 3. 3. — Lem. 1. huius.

Sed circulus datus atque ellipsoides analogum non sint inter easdem parallelas. Inter parallelas BF. DH. inter quas ellipsoides describatur, motu ad datum circulum proportionali describitur circulus ABCD. quod ex superioribus fieri posse manifestum est; eodem prorsus modo quo in prima parte huius propositionis, demonstrabimus ML. bifariam secari in P. Quare si incidenti secundæ, &c. Quod erat probandum.

2.3.& 4. huius.

COROLLARIVM.

Ex demonstratis manifestum est si LM. ponatur parallela ipsi FH. etiam illi respondentem TS. esse parallelam ipsi BD. & cum illa bifariam secetur in P. hanc bifariam secari in V. cumque æquales sint PK. LN. item RT. EV. & proportionales LN. RT. etiam proportionales esse PK. EV. ea proportione quæ est RT. ad LN. Ideoque cum sit ex hypothesi vt

I. — II. — III. — IV.

RT.

RT. ad EC. ita LN. ad GK. ac conuertendo & permutando vt EL. totum ad GK. totum, ita RT. id est EV. pars ad LN. id est KP. partem, & reliquum VC. ad reliquum PG. erit vt totum EC. ad totum KG.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

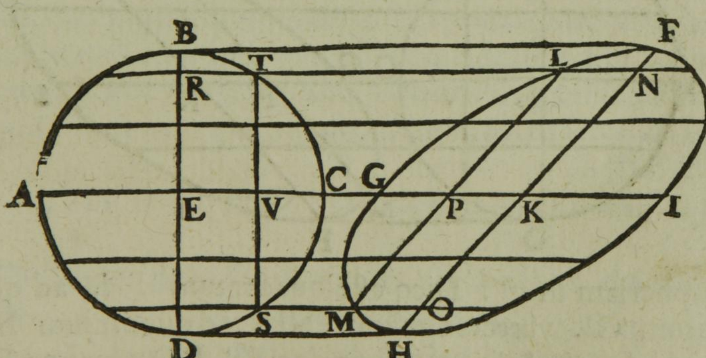
IN Ellipsoide quolibet incidens secunda, & parallelarum media sunt diametri coniugatæ.

SIT idem ellipsoides quod superiori propositione FGHI. in quo incidens secundaria, circa quam descriptum est, sit FH. parallelarum media GI. intra ellipsoides contenta. Dico FH. GI. esse diametros figuræ coniugatas. Nam quia recta FH. diuidit omnes parallelas interiores bifariam, ex definitione prima huius, seu ex descriptione, erit ipsa diameter ellipsoidis, per 10. definitionem primi Conicorum Apollonij. Item quia parallela media GI. diuidi omnes parallelas incidentis seu diametri FH. bifariam, erit & ipsa, ex eadem definitione, diameter. Insuper quia vtraque FH. GI. diameter est, & FH. parallelas ipsius GI. & GI. parallelas ipsius FH. bifariam secat, erunt ex definit. 17. 1. Conicorum FH. GI. diametri coniugatæ. Vocetur autem incidens FH. *Diameter prima*: parallelarum

defin. 1. huius.

defin. 10. 1. Conic.

5. huius.



Definit. 17. 1. Conic.

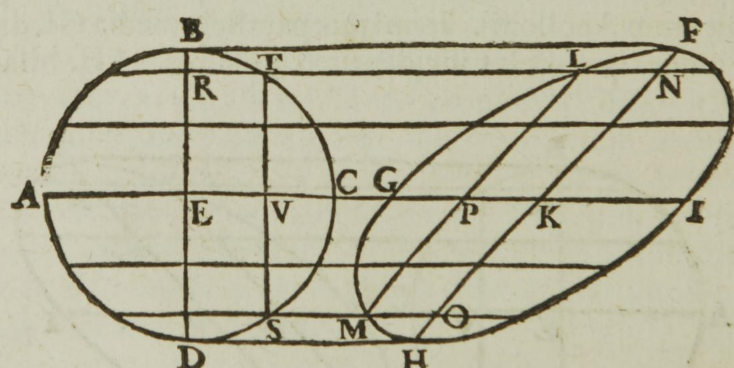
Definitio: diameter prima quid, quid secunda.

rum media GI. *Diameter secunda.* & punctum K. centrum.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Ellipsoidos diametrum primam quælibet parallelarum interiorum ita secat, vt quadratum primæ diametri ad quadratum secundæ, sit vt rectangulum partibus primæ diametri contentum ad quadratum dimidiæ parallelæ interioris primam diametrum secantis.

In schemate superiorum propositionum diametros primas ellipsoidis & circuli FH. BD. secet parallela interior RN. illam in N. istam in R. illius primetrum in L. istius



peripheriam in T. Dico esse quadratum FH. ad quadratum GI. vt rectangulum FNH. ad quadratum NL. Quoniam proportionales sunt duæ BR. RD. duabus FN. NH. erunt rectangula BRD. FNH. similia; & eandem ob causam similia erunt rectangula BED. FKH. Item quia proportionales sunt RD. ED. ipsis NH. KH. a quibus rectilinea BRD. BED. & FNH. FKH. similia similiterque descripta sunt: erit vt rectangulum BRD. ad rectangulum

Lem. 7. huius.
7. definit. 6.
22. 6.

lum BED. ita rectangulum FNH. ad rectangulum FKH. Ad hæc quia eſt vt RT. ad EC. ita LN. ad KG. erit vt quadratum RT. ad quadratum EC. ita quadratum LN. ad quadratum KG. ſed vt quadratum RT. ad quadratum EC. ita rectangulum BRD. ad rectangulum BED. (æqualia enim ſunt rectangula BRD. BED. quadratis RT. EC.) & vt rectangulum BRD. ad rectangulum BED. ita oſtenſum eſt rectangulum FNH. ad rectangulum FKH. vt igitur quadratum LN. ad quadratum GK. ita rectangulum FNH. ad rectangulum FKH. id eſt ad quadratum FK. & conſequentium quadrupla vt quadratum LN. ad quadratum GI. ita rectangulum FNH. ad quadratum FH. & conuertendo ac permutando erit quadratum FH. ad quadratum GI. vt rectangulum FNH. ad quadratum LN. Quod erat demonſtrandum.

1. defin. huius.
22. 6.
35. 3.
11. 5.
15. 5. & Schol. in 20. 6.

Quod ſi circulus datus atque ellipſoides analogum non ſint inter eaſdem parallelas: eodem modo quo in quinta huius, inter parallelas BF. DH. inter quas ellipſoides deſcribitur, motu ad datum circulum proportionali deſcribatur circulus ABCD. quod ex ſuperioribus conſtat fieri poſſe; eadem prorſus ratione qua in prima parte huius propoſitionis demonſtrabimus eſſe vt quadratum FH. ad quadratum GI. ita rectangulum FNH. ad quadratum LN. Quod ad perfectam demonſtrationem addendum erat.

2.3.& 4. huius.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

Ellipſoidos diametrum ſecundam quælibet ordinatim applicatarum ita ſecat, vt quadratum ſecundæ diametri ad quadratum primæ, ſit vt rectangulum ſub partibus primæ diametri, ad quadratum ordinatim applicatæ.

In ſuperiori ſchemate ex quocumque puncto L. ad ſecundam diametrum GI. applicetur ordinatim recta LP.

quæ producta secet perimetrum ellipsoideos in M. Dico esse vt quadratum GI. ad quadratum FH. ita rectangulum IPG. ad quadratum PL. Quoniam est vt EC. ad CV. ita KG. ad GP. ex Coroll. 5. huius, & antecedentium dupla AC. ad CV. vt IG. ad GP. erit diuidendo & conuertendo CV. ad VA. vt GP. ad PI. erunt igitur rectangula CVA. GPI. similia: & cum sit vt CE. ad EA. ita GK. ad KI. proportio videlicet æqualitatis, erunt rectangula CEA. GKI. similia: item quia proportionales sunt VA. EA. ipsis PI. KI. vt modo probatum est, a quibus rectilinea similia, similiterque descripta sunt CVA. CEA. in circulo, & GPA. GKI. in ellipsoide: erit vt rectangulum CVA. ad rectangulum CEA. ita rectangulum GPI. ad rectangulum GKI. præterea quia est vt VT. id est ER. ad EB. ita PL. id est KN. ad KF. erit vt quadratum TV. ad quadratum BE. ita quadratum LP. ad quadratum FK. sed vt quadratum TV. ad quadratum BE. ita rectangulum CVA. ad rectangulum CEA. (æqualia enim sunt rectangula CVA. CEA. quadratis TV. BE.) & vt rectangulum CVA. ad rectangulum CEA. ita rectangulum GPI. ad rectangulum GKI. vt igitur quadratum LP. ad quadratum FK. ita rectangulum GPI. ad rectangulum GKI. id est ad quadratum GK. & consequentium quadrupla vt quadratum LP. ad quadratũ FH. ita rectangulum GPI. ad quadratum GI. & conuertendo ac permutando erit quadratum GI. ad quadratum FH. vt rectãgulũ IPG. ad quadratum PL. Quod erat probandũ.

Coro'. 5. huius.

6. huius.

22. 6.

Lemm. 1. huius.

22. 6.

35. 3.

11. 5.

15. 5. & Schol. in 20. 6.

Si vero circulus datus, atque ellipsoides analogum non sint inter easdem parallelas, idem ostendetur contingere, eodem modo quo in fine præcedentis demonstratum est.

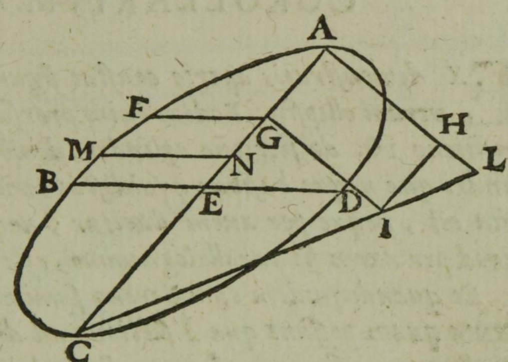
THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI in linea ellipsoide coniugatæ diametri sint, & fiat vt diameter prima, ad secundam, ita secunda ad aliam quampiam; quæ à se-

ctione

ctione ad diametrum ordinatim applicata est poterit spatium quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam & sectionem interijcitur, & deficiens figura simili ei quæ diametro ipsa & tertia proportionali continetur.

Sit ellipsoides ABCD. cuius diametri coniugatæ AC. BD. prima AC. secunda BD. & fiat vt AC. ad BD. ita BD. ad AL. Apteturque AL. ipsi AC. ad angulos rectos, & iuncta CL. applicetur FG. ordinatim ad BD. & ducatur GI. ipsi AL. æquidistans & HI. parallela rectæ AG. Dico quadratum FG. æquale esse rectangulo AI. Est enim vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita recta CA. ad rectam AL. Cum



enim sint continue proportionales AC. BD. AL. ex constructione erit vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita CA. ad AL. hoc est CG. ad GI. (sunt enim triangula CAL. CGI. similia ob parallelas GI. AL.) vt autem quadratum AC. ad quadratum BD. ita rectangulum CGA. ad quadratum FG. Quare rectangulum CGA. ad quadratum FG. est vt CG. ad GI. Vt autem CG. ad GI. ita rectangulum CGA. ad rectangulum AGI. (posita enim communi altitudine GA. erit vt CG. ad GI. ita rectangulum CGA. ad rectangulum AGI.) seu rectangulum AI. Ergo quadratum FG. æquale est rectangulo AI. quod adiacens tertiæ proportionali AL. latitudinem habet AG. & deficit figura LHI. ipsi LAC. simili.

Cor. 20 6.
4. 6.
Corol. 4. 6.
7. huius.
1. 6.
9. 5.

Vo-

Quid sit transuersum figuræ latus, quid rectum.

Vocetur autem AC. transuersum figuræ latus, & AL. latus rectum.

COROLLARIVM I.

Ex dictis manifestum est rectangulum CGA. ad quadratum FG. esse vt transuersum figuræ latus AC. ad rectum AL. probatum enim est esse vt CG. ad GI. ita rectangulum CGA. ad quadratum FG. vt autem CG. ad GI. ita est CA. ad AL. vt ergo CA. ad AL. ita rectangulum CGA. ad quadratum FG.

COROLLARIVM II.

Ellipsoides est Ellipsis

Ex demonstratis aperte constat figuram ellipsoiden esse veram ellipsin. Eodem enim prorsus modo Serenus propositione 16. de sectione cylindri, demonstrat sectionem cylindri quæ neque basibus æquidistat, neque subcontrarie posita est, neque per axem ducitur, neque æquidistanter ei quod per axem fit parallelogrammo, esse ellipsin.

Et quandoquidem cum Sereno sumimus, in ellipsi lineam iuxta quam possunt quæ à sectione ad diametrum ordinatim applicantur esse eam ad quam secunda diameter eandem habet rationem quam prima diameter ad secundam, id Federicus Commandinus magnus ille Geometra vix vlli antiquorum inferior, demonstrat in Commentario ad propositionem 16. lib. 1. Sereni de sectione cylindri, ad quem lectorem remittimus.

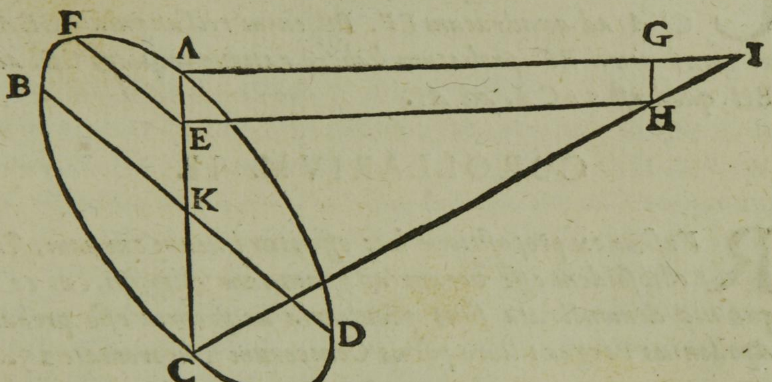
THEOREMA X. PROPOS. X.

SI in ellipsoide figura coniugatæ diametri sint, & fiat vt secunda diameter ad primam, ita prima ad aliam lineam: quæ ab ellipsoi-

de

de ad secundam diametrum ordinatim applicatur poterit spatium quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam, & sectionem interijcitur, & deficiens figura simili ei quæ secunda diametro & tertia proportionali inuenta continetur.

Sit ellipsoides ABCD. & fiat vt AC. secunda diameter ad DB. diametrum primam ita DB. ad AI. ponaturque AI. ad angulos rectos ipsi AC. deinde ad AC. ordinatim ap-



plicetur FE. & ducatur EH. ipsi AI. æquidistans, HG. vero æquidistans ipsi EA. Dico quadratum EF. parallelogrammo AH. æquale esse. Hoc eodem pene modo demonstrabitur quo priori propositione. Quoniam enim vt quadratũ AC. ad quadratum BD. ita linea CA. ad AI. (sunt enim in continua proportione CA. BD. AI. ideoque vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita AC. ad AI.) hoc est CE. ad EH. (sunt enim duo triangula CAI. CEH. ob parallelas AI. EH. similia) & per 8. huius est vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita rectangulum CEA. ad quadratum EF. Quare rectangulum CEA. ad quadratum EF.

Corol. 20. 6.
4. 6.
Corol. 4. 6.
8. huius.

EF. est vt CE. ad EH. vt autem CE. ad EH. ita rectangulum CEA. ad rectangulum HEA. (posita enim communi altitudine AE. erit vt CE. ad EH. ita rectangulum CEA. ad rectangulum HEA.) ergo quadratum EF. æquale est rectangulo AH. quod adiacens tertiæ proportionali AI. latitudinem habens AE. & deficiens figura GHI. simili ei quæ CEH. continetur. Quod erat demonstrandum.

1. 6.

COROLLARIVM. I.

Constat ex dictis esse vt CA. ad AI. ita rectangulum CEA. ad quadratum EF. Est enim rectangulum CEA. ad quadratum EF. probatum habere rationem quam CE. ad EH. quod est vt CA. ad AI.

4. 6.

COROLLARIVM. II.

Ellipsoides est ellipsis.

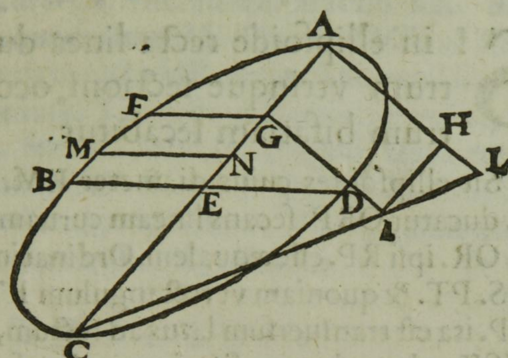
Rursum ex propositione hac efficitur lineam curuam, seu ellipsoidem esse veram ac genuinam ellipsim, cui ea quæ hic demonstrata sunt peculiaria ac propria esse probat Apollonius Pergæus libro primo Conicorum Theoremate 15.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

Si in ellipsoide rectæ lineæ ad diametrum ordinatim applicentur: erunt quadrata earum ad spatia contenta lineis quæ inter ipsas & terminos transuersi lateris figuræ interponuntur, vt rectum figuræ latus ad transuersum; inter se vero vt spatia quæ lineis similiter sumptis continentur.

In

In ſchemate nonæ huius. Sit ellipſoides ABCD. cuius diameter ac tranſuerſum figuræ latus AC. rectum AL. & ad ipſam AC. ordinatim applicentur FG, MN. Dico quadratum FG. ad rectangulum AGC. eſſe vt LA. ad AC. & quadratum FG. ad quadratum MN. eſſe vt rectangulum AGC. ad rectangulum ANC. Quoniam enim



eſt vt quadratum ſecundæ diametri BD. ad quadratum primæ diametri AC. ita quadratum FG. ad rectangulum AGC. & AL. latus tranſuerſum ad AC. erit vt latus rectum ad tranſuerſum, ita FG. quadratum ad rectangulum AGC. Eodemque modo oſtendetur eſſe vt latus rectum ad tranſuerſum ita, quadratum MN. ad rectangulum ANC. Erit igitur vt quadratum FG. ad rectangulum AGC. ita quadratum MN. ad rectangulum ANC. & permutando. Quod erat demonſtrandum.

8. huius.

Coroll. 1. 9. huius.

11. 5.

COROLLARIVM.

Tertium hoc ſymbolum eſt, figuram curuam, de qua agimus eſſe ellipſin; Nam hanc ellipſis proprietatem cum circulo tamen ac hyperbola cōmunem demonſtrauit Apollonius lib. 1. Conic. prop. 21. Cum vero conſtet hanc figuram neque circulum eſſe, neque hyperbolen, conſequitur vt ellipſis exiſtimanda ſit.

Ellipſoides eſſe ellipſim.

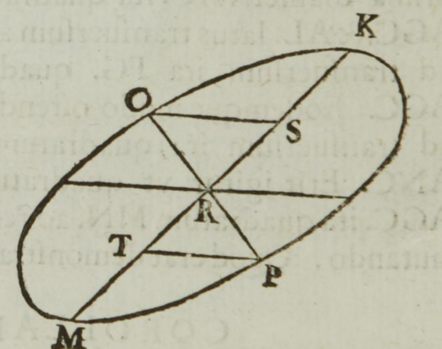
Atque his tribus notis contentus fuit Serenus vt ſectionem cylindri ellipſin eſſe probaret, cum tamen aſſereret multo plures ex elementis conicis peti poſſe. Nos adhuc quar-

tam addemus quæ non obſcure propoſitum efficiet.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI in ellipſoide recta linea ducatur per centrum vtrinque ſectioni occurrens ad centrum bifariam ſecabitur.

Sit ellipſoides cuius diameter KM. centrum R. & per R. ducatur ORP. ſecans lineam curuam in punctis OP. Dico OR. ipſi RP. eſſe æqualem. Ordinatim enim applicentur OS. PT. & quoniam vt rectangulum KTM. ad quadratum TP. ita eſt tranſuerſum latus ad rectum, & vt rectangulum MSK. ad quadratum SO. ita tranſuerſum latus ad rectum, erit vt rectangulum KTM. ad quadratum TP. ita rectangulum MSK. ad quadratum SO. vt autem quadratum TP. ad quadratum TR. ita quadratum SO. ad quadratum SR. (nam æquiangula ſunt, imo æqualia triangula PTR. OSR. ob æquales angulos ad verticem R. & alternos ad S. & T. item ad P. & O. æquales, cum parallelæ ſint ex deſcriptione OS. TP.) erit ex æquali vt rectangulum KTM. ad quadratum TR. ita rectangulum MSK. ad quadratum SR. & componendo, vt rectangulum KTM. vna cum quadrato TR. ad quadratum TR. hoc eſt quadratum MR. ad quadratum RT. (etenim recta MK. ſecatur bifariam in R. & in partes inæquales ad punctum T. ideoque rectangulum KTM. ſub inæqualibus ſegmentis KT. TM. vna cum quadrato TR. intermediæ ſectionis eſt æquale quadrato dimi-



Coroll. 1. ad 9. huius.
Coroll. 1. ad 9. huius.
22. 6.
15. 1.
29. 1.
5. 2.

diæ MR.) ita rectangulum MSK. vna cum quadrato SR. ad quadratum SR. id est (per eandem quintam secundi elementorum) quadratum KR. ad quadratum SR. & permutando vt quadratum MR. ad quadratum KR. ita quadratum TR. ad quadratum RS. Quare vt MR. ad RK. ita TR. ad RS. est autem recta MR. rectæ RK. æqualis, ex descriptione: quare recta TR. rectæ RS. æqualis existit, vt autem TR. ad RS. ita PR. ad RO. (æquiangula enim ostensa sunt triangula TRP. RSO.) Quare PR. & RO. sunt æquales. Quod erat propositum. Hanc autem ellipseos proprietatem demonstrat Apollonius.

22. 6.

4. 6.

SCHOLIVM.

HActenus quatuor veluti tesseras exhibuit Ellipsoides nostrum quibus sese genuinam ellipsin probaret, vt inter acutanguli coni sectiones reciperetur; tres quidem ex Sereni penu, quartam ex nostra officina depromptam; sed vereor ne si illæ lynceis scupulosi cuiuspiam Geometræ oculis dispiciantur non satis legitimæ videri possint, ac suspicionem mouere possint vsurpati nominis tam a nostra figura, quam a sectione cylindri apud Serenum & Archimedem de Conoidibus, & Sphæroidibus. Esto enim notæ quas Serenus, quas nos adduximus ellipsi conueniant, dubitare quis poterit num soli, & vtrum κυρίωσἴδια *sint* καὶ ἀντισρέφοντα, *an vero vt in Scholis loquuntur propria tantum primo modo: certe pleræque omnes affectiones quæ in libris conicorum Ellipsi inesse demonstrantur, etiam circulo, multæ hyperbolæ & oppositis sectionibus conueniunt; neque si circuli ac ellipseos differentia ignota esset, recte quis argueret ex affectionibus quas circulus cum ellipsi communes habet illum esse ellipsin. Quis nouit num sectio Cylindri, num Ellipsoides nostrum communione quidem dictorum symbolorum iungatur cum Ellipsi, natura tamen ab ea non minus quam circulus aut oppositæ sectiones, differat? Scitum est apud Dialecticos propositionem*

vniuersalem affirmantem non simpliciter sed per accidens tantum conuerti in particularem aientem. Nec enim si omnis homo animal est ideo omne animal est homo, neque efficitur si omnis ellipsis hoc habet vt prima diameter sectionis ad secundam eam rationem habeat quam secunda ad aliam quampiam, quæ ad secundam applicata ordinatim possit spatium quod adiacet tertiæ proportionali, & reliqua quæ in quinta huius demonstrata sunt, vt ideo quicquid hoc habet protinus sit ellipsis; Quare cum huiusmodi signa occurrunt, plærumq; peritiores Mathematici vtuntur ἀπαγωγῇ εἰς ἀδύνατον *seu abductione ad absurdum qua certo statuunt id de quo dubitabatur; quæ demonstratio licet* δεικτικῆ *minus sit* ἐπιστημονικῆ, *ac dignitate concedat, veritate tamen ac certitudine ne hilum quidem inferior est.*

Nos igitur superioribus notis vsi ex contraria assertione manifestum absurdum deriuabimus, atque ita totam rem extra omnem dubietatis aleam constituemus.

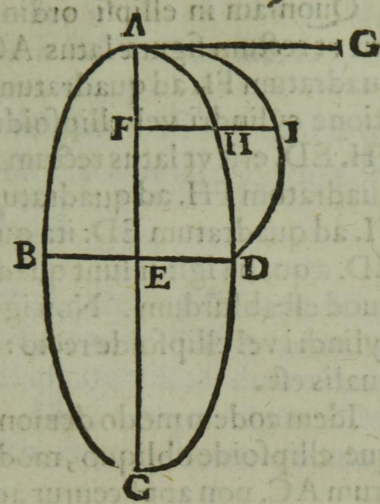
THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

PRopositum sit verè demonstrare, sectionem cylindri quæ neque basibus æquidistat, neque subcontrarie posita est neque per axem, neque æquidistante ei quod per axem fit parallelogrammo; item Ellipsoides quodcúq; esse Ellipsin.

Sit primum sectio cylindri cuiusdmodi posita est in propositione, & Ellipsoides quodcumque rectum ABCD. cuius prima diameter seu axis AC. secunda diameter seu axis BD. fiatque vt AC. ad BD. ita BD. ad aliam videlicet AG. quæ statuatur ipsi AC. ad angulos rectos, erit (ex ijs quæ demonstrat Federicus Commandinus commentario in 16. proposit. Sereni de sectione cylindri, quod etiam se demonstrasse affirmat Serenus in Commentarijs suis in

Command. in 16. 1. Sereni.

Apol-



Apollonium, quæ ad nos non peruenerunt) AC. transuersum figuræ latus, & AG. rectum, seu recta iuxta quam possunt quæ a sectione ad diametrum ordinatim applicantur. Iam vero per primam partem 54. 1. in subiecto plano describatur ellipsis ita vt eius diameter sit AC. vertex A. & rectum latus AG. ductæ vero a sectione ad AC. in angulo recto applicentur, quæ latitudines habeant lineas interiectas & punctum A. deficiantque figura simili & similiter posita ei quæ lineis CA. AG. continetur: & diuisa AC. bifariam in E. ducatur secunda seu axis BD. faciens angulos rectos cum BC. Hinc Ellipsis dicta sectioni cylindri aut ellipsoidi recto superimponatur, & congruat AC. ellipsis cum diametro AC. sectionis cylindri aut ellipsoideos recti ipsis æquali: congruet etiam angulus rectus CAG. cum recto, & AG ellipsis cum æquali AG. sectionis, aut ellipsoidis recti & recta BD. cum BD. & cum centro centrum E. (Nam cum sint æquales EA. AG. tam in ellipsi quam in cylindri sectione, & ellipsoide recto, & inter eas media proportionalis BD. erit BD. ellipsis æqualis BD. sectionis) Ergo aut ellipsis cum sectione, vel ellipsoide congruet, aut certe non congruet: Dicatur primum non congruere; igitur ab illa deficiet, deficiat igitur ad puncta H. I. ductaque FHI. ordinatim applicata ad diametrum AC. secet sectionem cylindri vel ellipsoides & ellipsim in punctis H. I. ita vt arcus AID. sit arcus ellipsis & AHD. arcus sectionis cylindricæ, vel Ellipsoidis.

54. 1. Conicorum.

Quo-

21.1. Conicorum.

Quoniam in ellipsi ordinatim applicatæ sunt ED. FI. erit vt rectum figuræ latus AG. ad transuersum AC. ita quadratum FI. ad quadratum ED. Rursus quoniam in sectione cylindri vel ellipsoide ordinatim applicatæ sunt FH. ED. erit vt latus rectum AG. ad transuersum AC. ita quadratum FH. ad quadratum ED. Vt igitur quadratum FI. ad quadratum ED. ita quadratum FH. ad quadratum ED. æqualia igitur sunt quadrata FH. FI. pars & totum: quod est absurdum. Non igitur deficit ellipsis a sectione cylindri vel ellipsoide recto: conuenit ergo: quare illi æqualis est.

28.1. Sereni de sect. cylindri.

11. 5.

8. pronunc.

Idem eodem modo demonstrabimus etiam in quocumque ellipsoide obliquo, modo ductæ a sectione ad diametrum AC. non applicenrur ad angulos rectos, sed ad angulos æquales ijs quos applicatæ cum diametro efficiunt in ellipsoide obliquo; & per secundam partem 54. 1. Conicorum describatur ellipsis, vt dictum est prima parte huius, cuius diametet AC. vertex A. rectum latus AG. idem quod in Ellipsoide, ac fiat impositio vtriusque figuræ: idem enim absurdum sequetur si illæ non dicantur congruere. Igitur vere demonstratum est sectionem Cylindri quæ neque basibus æquidistat, neque sub contrarie posita est, neque per axem, neque æquidistante ei quod per axem fit parallelogrammo, item ellipsoides quodcumque esse ellipsin.

SCHOLIVM.

M*Vtato igitur nomine Ellipsodea dicantur* Ellipsei Analogæ; *quarum aliæ vocentur* Rectæ *aliæ* obliquæ: *aliæ* Æquichordes; *aliæ* Diuersichordes: *ijsdem scilicet cognominibus quibus Ellipsoidea in Scholio quartæ huius distinximus.*

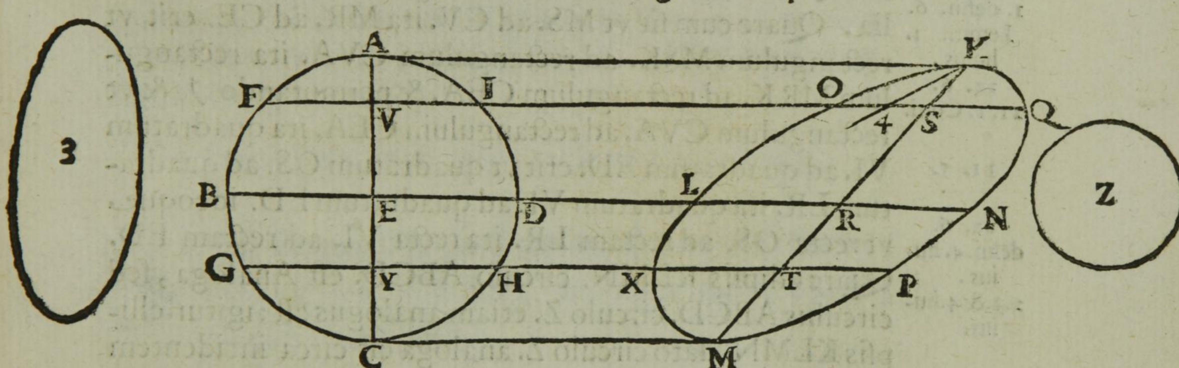
THEO-

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

Quælibet ellipsis circa quamlibet suarum diametrorum dato circulo, datæque ellipsi est analoga.

Datus sit circulus quilibet Z. & ellipsis 3. & sit quælibet ellipsis KLMN. cuius quælibet diameter KM. centrum R. Dico ellipsim KLMN. circa diametrum KM. dato circulo Z. aut ellipsi 3. esse analogam. Ducantur per puncta K.M. rectæ KA. MC. ellipsim KLMN. contingentes: quoniam

Lemm. 4. huius.



recta KM. transit per centrum R. ellipsis, cum ponatur eius diameter, rectæ KA. MC. sibi ipsis æquidistabunt. Inter duas parallelas KA. MC. ducta ad vtramque perpendiculari AC. describatur circulus ABCD. & & mota AC. motu ad MC. æquidistanti faciat parallelas in vtraque figura FVI. OSQ. & BED. LRN. & GYH. XTP. quæ secentur illic ab AC. in punctis V. E. Y. istic a KM. in punctis S. R. T. Constat in circulo parallelas dictas secari bifariam in punctis V. E. Y. In ellipsi vero KLMN. cum recta LRN. transeat per centrum R. secabitur in R. bifariam sed & OSQ. bifariam secatur in S. si enim non; secetur

27. 2. Coni.

3. 3.

30. 1. Coni.

bifa-

bifariam in puncto 4. & ducatur K4. quoniam ellipsim KLMN. contingit KA. in puncto A. & huic æquidistans O4Q. diuisa est bifariam in puncto 4. erit K4. diameter ellipsis, quod est absurdum cum non transeat per centrum; atque eodem modo probabitur rectam XP. & quamlibet parallelarum ad LN. secari bifariam a diametro KM. ordinatim igitur applicantur ad diametrum KM. rectæ OS. LR. XT. &c. Ergo erit vt rectangulum MSK. ad rectangulum MRK. ita quadratum OS. ad quadratum LR. & vt rectangulum MSK. ad rectangulum MRK. ita rectangulum CVA. ad rectangulum CEA. (nam cum sit vt MS. ad SK. ita CV. ad VA. erunt rectangula MSK. MVA. similia, & ob eandem causam rectangula MRK. MEA. similia. Quare cum sit vt MS. ad CV. ita MR. ad CE. erit vt rectangulum MSK. ad rectangulum CVA. ita rectangulum MRK. ad rectangulum CEA. & permutando) & vt rectangulum CVA. ad rectangulum CEA. ita quadratum VI. ad quadratum ED. erit vt quadratum OS. ad quadratum LR. ita quadratum VI. ad quadratum ED. ideoque vt recta OS. ad rectam LR. ita recta VI. ad rectam ED. Quare ellipsis KLMN. circulo ABCD. est Analoga, sed circulus ABCD. circulo Z. etiam analogus est: igitur ellipsis KLMN. dato circulo Z. analoga est circa incidentem seu diametrum KM.

7. 2. Coni. | 12. definit. 1. Conic. | 21. 1. Coni. | Lemm. 1. huius. | 1. defin. 6. | Lemm. 1. huius. | 22. 6. | 21. 1. Coni. | 11. 5. | 22. 6. | defin. 4. huius. | 2. 3. & 4. huius.

Rursus quia ellipsis 3. ex prima parte huius propositionis, circulo Z. analoga est circa quamlibet suarum diametrorum, & eidem circulo analoga est ellipsis KLMN. circa quamlibet suarum diametrorum, manifestum est ellipses KLMN. & 4. circa quamlibet suarum diametrorum descriptas esse analogas. Quare quælibet ellipsis circa quamlibet &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI motu ad datam Ellipſin æquidiſtanter proportionali figura deſcribatur; ea aut Circulus erit, aut Ellipſis.

Hæc propoſitio euidenter deducitur ex ſuperiori. Nam quælibet ellipſis cuilibet circulo atque ellipſi analoga eſt, ergo motu ad datum circulum aut ellipſin æquidiſtanter proportionali deſcribitur; Cum autem idem ſit motus quo circulus aut ellipſis data, & ellipſis analoga deſcribuntur; ſi ellipſis analoga ſtatuatur prima atque data; manifeſtum eſt circulum aut ellipſin, quæ data erat, motu æquidiſtanter proportionali delineari ac fieri analogam. Quod erat probandum.

14. huius.

4. defin. huius.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI ad datam Parabolam motu æquidiſtanter proportionali figura analoga deſcribatur, ea erit Parabola.

Inter eaſdem aut diuerſas parallelas AK. CL. data ſit parabola ABC. cuius diameter AC. latus rectum AT. & incidens ſecunda quæcumque KL. moueatur AK. æquidiſtanter ipſi CL. ita vt continuò parallelæ circa KL. ſint proportionales parallelis circa AC. nimirum vt NM. ad PO. ita DE. ad FG. & vt PO. ad RQ. ita FG. ad HI. & vt RQ. ad SL. ita HI. ad CB. atque ita deinceps etiam ex alia parte incidentium; ſecabuntur etiam AC. KL. proportionaliter, ideoque iuxta primam definitionem huius, erit motus ad datam parabolam æquidiſtanter proportionalis: Deſcribatur eo motu figura KSL. quæ erit analoga parabolæ ABC. Dico illam figuram eſſe parabolam. Quo-

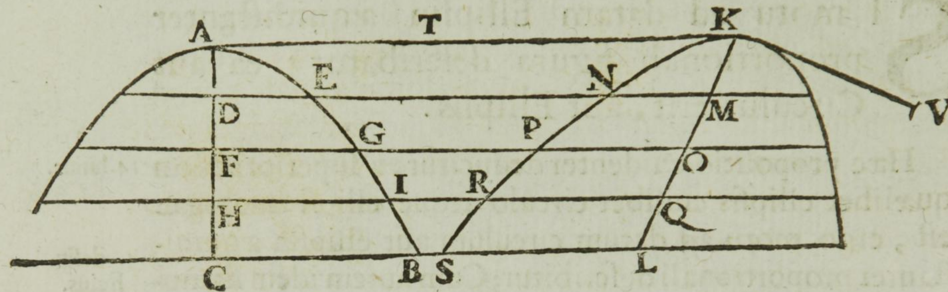
Lemm. 1. huius.

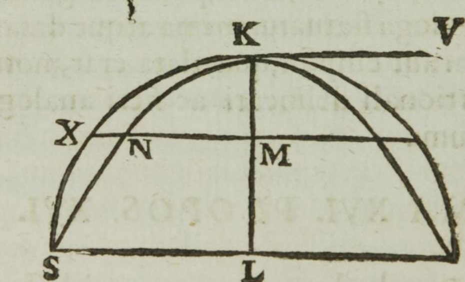
1. defin. huius.

4. defin. huius.

Lem. 1. & definit. 1. huius.

niam sectæ sunt proportionaliter DK. FA. in punctis M. D. erit vt OK. ad MK. ita FA. ad DA: item quia parabola





20. 1. Conic. Definit. 1. huius. 22. 6.

est ABC. erit vt FA. ad DA. ita quadratum FG. ad quadratum DE. Rursus quia proportionales sunt rectæ DE. FG. rectis NM. PO. erit vt quadratum FG. ad quadratum DE. ita quadratum PO. ad quadratum NM. ergo a primo ad vltimum vt recta OK. ad rectam MK. (nempe vt lineæ quæ ob ordinatim applicatis ex diametro ad verticem abscinduntur) ita quadratum PO. ad quadratum NM. nimirum ita sunt inter se quadrata ordinatim applicatarum, quod tanquam parabolæ peculiare demonstrat Apollonius lib. 1. Conic. proposit. 20.

Rursus quadrato NM. fiat rectangulum MKV. æquale & ipsi LK. sit KV. ad punctum K. perpendicularis. Quoniam rectangula MKV. OKV. eandem altitudinem habent K. erunt vt bases MK. OK. sed vt MK. ad OK. ita

1. 6.

paulo

paulo ante ostensum est quadratum MN. ad quadratum OP. vt igitur rectangulum MKV. ad rectangulum OKV. ita quadratum NM. ad quadratum PO. & permutando vt rectangulum MKV. ad quadratum NM. ita rectangulum OKV. ad quadratum PO. æquale autem est rectangulum MKV. quadrato NM. ex hypothesi, igitur æquale erit rectangulum OKV. quadrato PO. atque ita rectangulum QKV. erit æquale quadrato RQ. &c. Quod parabolæ conuenire demonstrat Apollonius 11. primi Conicorum, vocatque KV. Rectum figuræ latus.

11.1.Conic.

Iam vero constat ex 52. primi Conicorum posse inueniri parabolam, cuius diameter sit data KL. vertex punctum K. Ducta vero quælibet SL. à sectione ad diametrum in angulo SLK. possit rectangulum LKV. sub recta LK. & perpendiculari seu latere recto KV. Inuenta iam sit & imponatur dicta parabola figuræ KSL. congruent rectæ LK. parabolæ, & LK. figuræ KSL. cum æquales positæ sint. Item rectæ SL. vtriusque figuræ, cum tam SL. quam angulus SLK. ponantur æqualia: deniq; ob eandem causam conuenient KV. in vtraque figura. Igitur, aut congruent dictæ figuræ, aut non congruent: ponantur primum non congruere, ac vbi deficiunt applicetur ordinatim MNX. quæ secet figurã analogam in N. parabolam in X. Quoniam in vtraque figura KV. est recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ; erit rectangulum MKV. æquale quadrato MN. ex secunda parte huius propositionis: idemque rectangulum MKV. æquale quadrato MX. ex 11. 1. Conic. Igitur æqualia sunt quadrata LI. LH. pars & totum: quod est absurdum: congruent igitur Parabola, & figura analoga. Igitur æqualia sunt, ac in vnam figuram coincidunt, estque figura analoga KSL. Parabola. Quod erat demonstrandum.

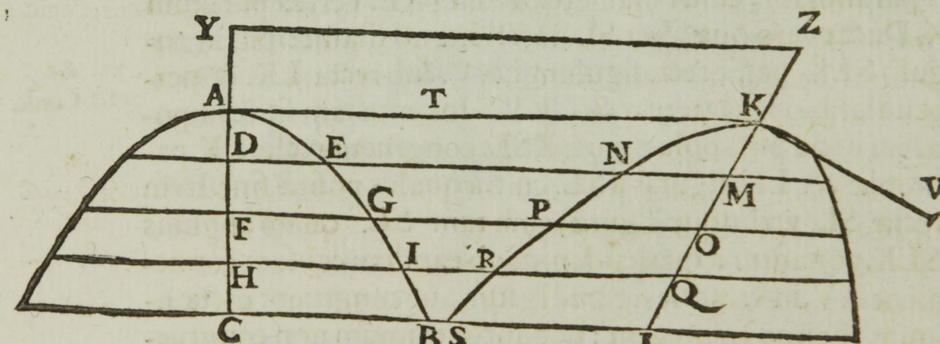
11.1.Conic.

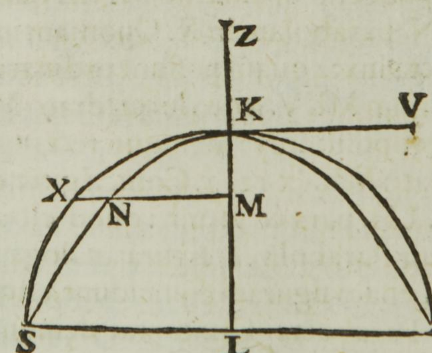
2. parte huius.
11.1.Conic.
9. 5.
8. pron.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

SI ad datam Hyperbolam motu æquidiſtanter proportionali figura analoga deſcribatur; ea erit Hyperbola.

Sit idem ſchema quod ſuperiori propoſitione, ſed figura ABC. ponatur eſſe Hyperbola, & fiant reliqua vt in præcedenti, tantum Hyperbolæ ABC. accipiatur tranſ-





uerſum latus AY. & ducta YZ. ipſi AK. parallela producatur LK. dum concurrat cum YZ. in puncto Z. Dico figuram analogam KSL. eſſe Hyperbolam; Eſt enim vt YD.

Lemm. 2. huius.

ad

ad DF. ita ZM. ad MO. & componendo, & per conuersionem rationis ac permutando vt YF. ad ZO. ita YD. ad ZM. sed est etiam vt YF. ad FA. ita ZO. ad OK. & vt YD. ad DA. ita ZM. ad MK. similia igitur sunt rectangula YFA. ZOK. item rectangula YDA. ZMK. cum igitur sit vt YF. ad ZO. ita YD. ad ZM. & super prima ac secunda facta sint duo rectangula similia YFA. ZOK. & super tertia & quarta duo itidem similia YDA. ZMK. erit vt rectangulum YFA. ad rectangulum ZOK. ita rectangulum YDA. ad rectangulum ZMK. & permutando vt rectangulum YFA. ad rectangulum YDA. ita rectangulum ZOK. ad rectangulum ZMK. sed vt rectangulum YFA. ad rectangulum YDA. ita quadratum FG. ad quadratum DE. & vt quadratum FG. ad quadratum DE. ita quadratum PO. ad quadratum NM. igitur vt rectangulum ZOK. ad rectangulum ZMK. ita quadratum PO. ad quadratum NM.

Lemm. 1. huius.

22. 6.

21. 1. Conic.

22. 6.

Deinde fiat vt rectangulum ZMK. ad quadratum MN. ita ZK. ad KV. Quoniam ostensum est prima parte huius, esse rectangulum ZOK. ad rectangulum ZMK. vt quadratum PO. ad quadratum MN. erit conuertendo & permutando vt rectangulum ZMK. ad quadratum MN. id est vt ZK. ad KV. ita rectangulum ZOK. ad quadratum PO. Atque eodem modo probabimus esse vt ZK. ad KV. ita rectangulum ZQK. ad quadratum QR. Has affectiones etiam in Hyperbola demonstrat Apollonius I. Conic. prop. 21.

Corol. 20. 6.

Constat autem ex 53. 1. Conicorum posse inueniri Hyperbolam cuius latus rectum KV. transuersum KZ. & diameter KL. ducta vero qualibet SL. a sectione ad diametrum in angulo SLK. sit vt ZK. ad KV. ita rectangulum ZLM. ad quadratum SL. Inuenta iam sit & imponatur dicta Hyperbola figura XSL. congruent rectæ LK. Hyperbolæ, & LK. figuræ, cum æquales positæ sint: Item rectæ SL. vtriusqne figuræ, cum tam rectæ SL. quam anguli SLK. ponantur æquales: denique ob eandem causam conuenient

uenient KV. in vtraque figura. Congruent ergo dictæ figuræ, aut minime congruent. Ponuntur primum non congruere, ac vbi deficiunt applicetur ordinatim MNX. quæ secet figuram analogam in N. Hyperbolam in X. Quoniam in vtraque figura KV. est recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ, ZK. latus transuersum, erit ex secunda parte huius propositionis, vt ZK. ad KV. ita rectangulum ZMK. ad quadratum MN.& vt ZK. ad KV.ita rectangulum ZMK. ad quadratum MX. æqualia igitur sunt quadrata MN. MX. pars & totum Quod est absurdum congruent igitur Hyperbola ac figura Analoga, æquales ergo sunt; immo in vnam figuram concidunt, vt proinde figura analoga KSL. sit Hyperbola. Quod erat demonstrandum.

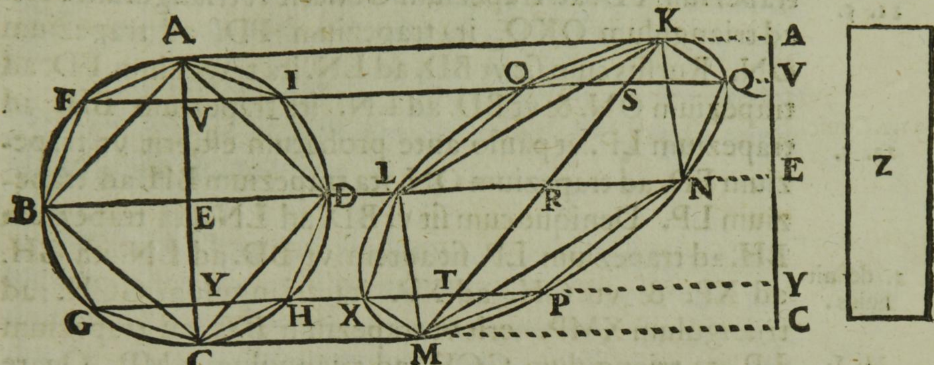
21.1.Conic. 9. 5.

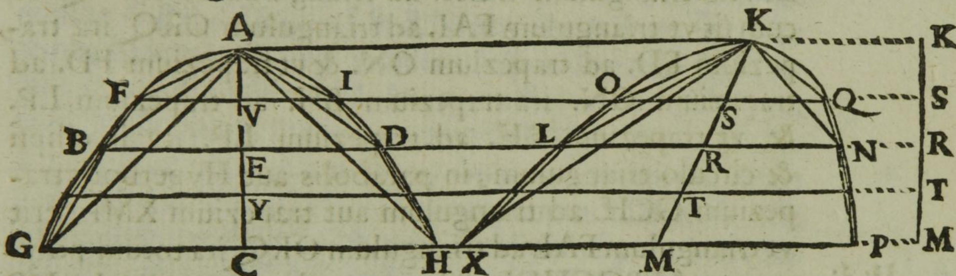
THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

Polygona in Circulo atque Ellipsi analoga; item in Parabolis aut Hyperbolis analogis intra easdem parallelas similiter inscripta sunt inter se vt parallelæ proportionales.

Inter easdem parallelas AK.CM.descriptus sit circulus ABCD. & Ellipsis analoga KLMN.item duæ aut parabolæ, aut Hyperbolæ analogæ AC. KM. quorum diametri secundæ BD. LN. eaque secent quotcumque parallelæ proportionales illum FI.BD.GH.istam OQ. LN.XP.connectantur rectis sibi respondentibus AF. FB. BG. &c. & KO. OL. LM. &c. quæ efficient duo polygona in circulo, & ellipsi similiter descripta, eo modo quo definitione quinta huius traditum est. Dico polygonum AFBGCH DI. ad polygonum KOLXMPNQ. esse vt proportionalem quamcumque FI. ad proportionalem OQ. Secet diameter AC. rectis FI. BD. GH. in punctis VEY. erit AV. altitudo tam trianguli FAI. quam trianguli OKQ. eo

quod sint inter easdem parallelas: itemque recta VE. erit altitudo trapeziorum FD. ON. & EY. altitudo trape-





ziorum BH. LP. denique YC. altitudo triangulorum in circulo & ellipsi, & in parabola, & Hyperbola vltimorum trapeziorum GCH. XMP. Quoniam igitur triangula FAI. OKQ eandem habent altitudinem, erunt inter se vt bases, quare vt FI. ad OQ. ita triangulum FAI. ad triangulum OKQ. Rursus quia trapezia FD. ON. habent latera FI. BD. proportionalia lateribus OQ. LN. erunt inter se vt rectangula sub BD. EV. & sub LN. EV. sed rectangula sub BD. EV. & LN. EV. sunt inter se vt bases BD. LN. vt igitur BD. ad LN. ita trapezium FD. ad trapezium ON. eodem modo ostendemus esse vt GH. ad XP. ita trapezium BH. ad trapezium LP. &

1. 6.

36.4. huius.

1. 6.

trian-

triangulum GCH. ad triangulum XMP. Cum igitur ſit vt FI. ad OQ. ita triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ſit autem vt FI. ad OQ. ita BD. ad LN. & vt BD. ad LN. ita trapezium FD. ad trapezium ON. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. Rurſus cum ſit vt BD. ad LN. ita trapezium FD. ad trapezium ON. & vt BD. ad LN. ita trapezium BH. ad trapezium LP. vt paulo ante probatum eſt, erit vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium BH. ad trapezium LP. Denique cum ſit vt BD. ad LN. ita trapezium BH. ad trapezium LP. ſit autem vt BD. ad LN. ita GH. ad XP. & vt GH. ad XP. ita triangulum GCH. ad triangulum XMP. erit vt trapezium BX. ad trapezium LP. ita triangulum GCH. ad triangulum XMP. Quare cum ſit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. & vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium BH. ad trapezium LP. & vt trapezium BH. ad trapezium LP. ita in ellipſi & circulo triangulum, in parabolis aut Hyperbolis trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita totum polygonum AFBGCHDI. ad totum polygonum KOLXMP NQ. ſed vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita oſtenſum eſt eſſe FI. ad OQ. Vt igitur FI. ad OQ. parallela proportionalis ad proportionalem ita polygonum AFBG CHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. Quod erat demonſtrandum.

defin. 1. huius. 11. 5. 11. 5. 1. definit. huius. 11. 5. 11. 5.

COROLLARIVM

Ex dictis conſtat polygona in circulo atque ellipſi analoga inter eaſdem parallelas ſimiliter deſcripta eſſe vt ſecundas diametros. Nam vt FI. ad OQ. ita polygonum ad polygonum. ſed vt FI. ad OQ. ita diameter ſecunda BD. ad ſecundam LN. Vt igitur BD. ad LN. ita polygonum ad polygonum.

3. defin. huius.

THEO-

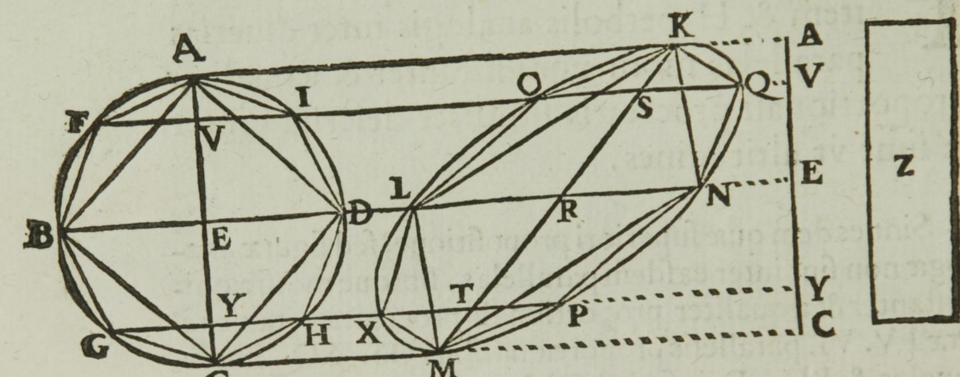
THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

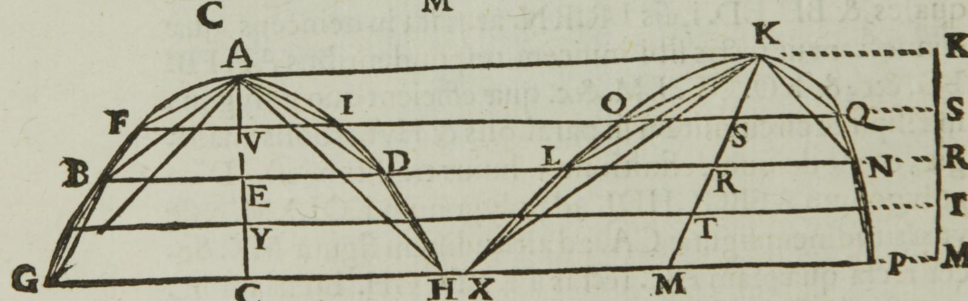
Polygona in Circulo atque Ellipsi: Parabolis item & Hyperbolis analogis inter diuersas parallelas motu æquidistanter & æqualiter proportionali procreatis similiter descripta inter se sunt vt altitudines.

Sint eadem quæ superiori propositione, sed figuræ analogæ non sint inter easdem parallelas, sintque motu æquidistanter & æqualiter proportionali procreatæ, ita vt rectæ FV. VI. parallelis proportionalibus OS. SQ. sint æquales, & BE. ED. ipsis LR. RN. atq; ita in deinceps, quæ connectantur rectis sibi inuicem respondentibus AF. FB. BG. &c. & KO. OL. LM. &c. quæ efficient duo polygona in ellipsi & circulo; item in parabolis & Hyperbolis analogis, eo modo quo definitione 5. huius traditum est. Dico polygonum AFBGCHDI. ad polygonum KOLXM. esse vt altitudinem figuræ CA. ad altitudinem figuræ MK. Secet recta quæpiam AC. rectas FI. BD. GH. bifariam in punctis V. E. Y. sitque ad angulos rectos parallelis extremis, erit AV. altitudo trianguli FAI. VE. altitudo trapezij FD. & EY. altitudo trapezij BH. & YC. altitudo trianguli in circulo; in Parabola vero aut Hyperbola vltimi trapezij GCH. Ita sit KM. ad angulos rectos parallelis extremis, & KM. diameter secet parallelas proportionales OQ. LN. XP. bifariam in punctis S. R. T. erunt KS. SR. RT. altitudines trianguli, & trapeziorum OKQ. ON. LP. & TM. altitudo trianguli XMP. in ellipsi; in Parabola vero aut Hyperbola trapezij XMP. Quoniam igitur triangula FAI. OKQ. æquales habeat bases, ex hypothesi, erunt inter se vt altitudines: quare vt AV. ad KS. ita triangulum FAI. ad triangulum OKQ. Rursus quia trape- Corol. 1. 6.

ziorum FD. ON. æqualia sunt latera parallela FI. BD. lateribus OQ. LN. sunt inter se vt altitudines VE. SR. Eo-

28. quarti.





dem modo ostendemus vt EY. ad RT. ita trapezium BH. ad trapezium LP. & vt YC. ad TM. ita triangulum, aut trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP. Cum igitur sit triangulum FAI. ad triangulum OKQ. vt AV. ad KS. & vt AV. ad KS. ita VE. ad SR. & vt VE. ad SR. ita trapezium FD. ad trapezium ON. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. Item cum sit trapezium FD. ad trapezium ON. vt VE. ad SR. & vt VE. ad SR. ita EY. ad RT. & vt EY. ad RT. ita trapezium BH. ad trapezium LP. erit vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium BH. ad trapezium LP. Atque eadem ratione ostendemus esse vt

defin. 1. huius.

1. Lemm. huius.

tra-

trapezium BH. ad trapezium LP. ita triangulum aut trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP. Quare cum sit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. & vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium FH. ad trapezium LP. & vt trapezium FH. ad trapezium LP. ita triangulum aut trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita totum polygonum AFBGCHDI. ad totum polygonum KOLXMPNQ. sed vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita AV. ad KS. vt modo probatum est, & vt AV. ad KS. ita AC. ad KM. vt igitur AC. altitudo ad altitudinem KM. ita polygonum AFBGCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. Quod erat demonstrandum.

12. 5.

Lemm. 1. huius.

THEOREMA XX PROPOS. XX.

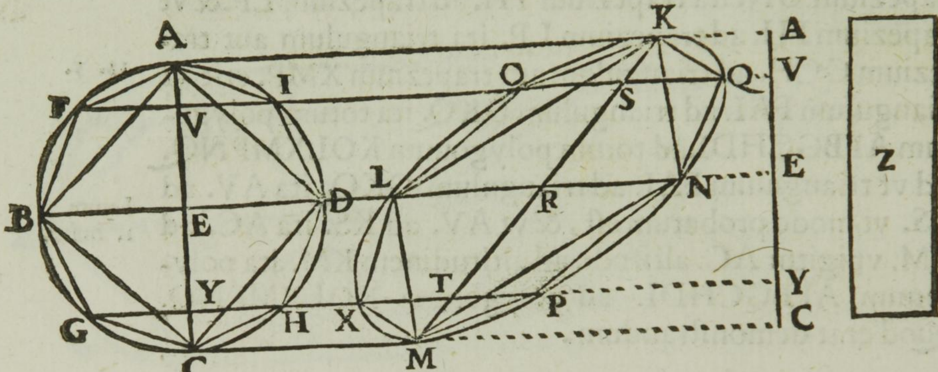
Circuli atque Ellipses: Parabolæ item, aut Hyperbolæ analogæ inter easdem, aut æqualiter distantes parallelas descriptæ sunt inter se vt parallelæ proportionales.

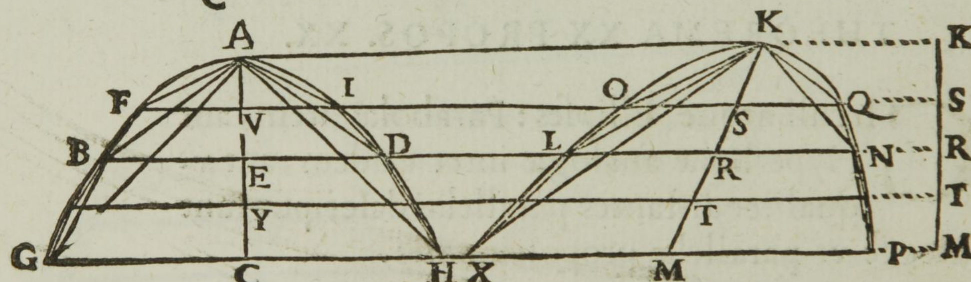
Inter easdem parallelas AK. CM. descripta sint circulus ABCD. & ellipsis analoga KLMN. & Parabolæ aut Hyperbolæ AC. KM. quorum parallelæ quælibet proportionales FI. OQ. Dico esse vt FI. ad OQ. ita circulum ABCD. ad ellipsin KLMN. & Parabolam aut Hyperbolam AC. ad Parabolam aut Hyperbelam KM. Si enim non ita sit; sit vt ad OQ. ita circulus aut Parabola aut Hyperbola data ABCD. ad aliquam aliam magnitudinem quæ sit Z. quæ vel minor erit, vel maior ellipsi vel Parabola, vel Hyperbola analoga KLMN. si enim esset æqualis, haberet circulus ABCD. ad ellipsin KLMN. eandem proportionem, ac propterea esset circulus ad ellipsin vt FI. ad OQ. quod non supponitur. Sit ergo primum magnitudo Z. minor quam

7. 5.

ellipsis KLMN. atque idem dicendum in Parabolis aut Hyperbolis: Inscribatur ellipsi & Parabolæ, ac Hyperbo-

1. huius.





læ analogæ KM. figura multorum angulorum, & numero parium quæ maior sit magnitudine Z. minore quam ipsa Ellipsis aut Parabola aut Hyperbola data sitque dicta figura KOLXMPNQ. Hinc circulo ABCD. inscribatur Polygonum similiter polygono ellipseos quod sit AFBG CXDI. (ac quod de ellipsi dicitur intelligatur de Parabola & Hyperbola analoga) Quoniam est vt FI. ad OQ. ita polygonum AFBGCXDI. ad polygonum KOLXMP NQ. & vt FI. ad OQ. ita ponitur circulus ABCD. ad magnitudinem Z. erit vt polygonum AFBGCHLI. ad polygonum KOLXMPNQ. ita circulus ABCD. ad magnitudinem Z. & permutando, vt polygonum AFBGCHLI. ad

24 huius.

circulum

circulum ABCD. ita polygonum KOLXMPNQ. ad magnitudinem Z. sed polygonum AFBGCHLI. est minus circulo ABCD. igitur & polygonum KOLXMPNQ. est minus magnitudine Z. ostensum autem est & maius: quod est absurdum; non igitur minor est magnitudo Z. ellipsi KLMN. Quo vero modo probauimus non posse esse vt FI. ad OQ. ita circulum ABCD. ad magnitudinem minorem ellipsi KLMN. ita ostendemus non posse esse vt OQ. ad FI. ita ellipsin KLMN: ad magnitudinem circulo ABCD. minorem, vt euidenter constat.

14. 5.

Sit deinde magnitudo Z. maior ellipsi KLMN. Cum ergo ponatur circulus ABCD. ad Z. esse vt BD. ad LN. erit & conuertendo Z. ad circulum ABCD. vt LN. ad BD. ponatur vt Z. ad circulum ABCD. ita ellipsis KLMN. ad magnitudinem aliquam 3. erit permutando vt Z. ad Ellipsin KLMN. ita circulus ABCD. ad magnitudinem 3. sed Z. ponitur maior quam ellipsis KLMN. ergo maior est circulus ABCD. magnitudine 3. Quare erit vt LN. ad BD. ita ellipsis KLMN. ad magnitudinem 3. minorem circulo ABCD. Quod est absurdum, & contra id quod in fine primæ partis huius probatum, est. Ergo circuli atque ellipses analogæ &c. Quod erat demonstrandum.

14. 5.

Idem sequetur si inter æqualiter distantes diametros circulus atque ellipsis; Parabolæ item atque Hyperbolæ analogæ describantur.

COROLLARIVM.

Hinc constat circulos atque ellipses analogas inter easdem parallelas motu æquidistanter proportionali descriptas esse vt secundas diametros: nam secundæ diametri etiam sunt parallelæ proportionales.

THEO-

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

CIrculus & ellipſis analoga; Parabolæ item aut Hyperbolæ analogæ inter diuerſas parallelas motu æquidiſtanter, & æqualiter proportionali deſcriptæ ſunt inter ſe vt altitudines.

Inter diuerſas parallelas deſcriptæ ſint figuræ analogæ, circulus quidem & ellipſis; Parabolæ item Hyperbolæ AC. KM. motu æquidiſtanter & æqualiter proportionali ita rectæ FV. VI. parallelis proportionalibus OS.SQ. ſint æquales, & BE. ED. ipſis LR. RN. atque ita deinceps. Dico eſſe vt altitudinem figuræ AC. ad altitudinem figuræ KM. ita figuram AC. ad figuram KM. Si enim non ita ſit; vt altitudo figuræ AC. ad altitudinem figuræ KM. ita fiat figura AC. ad aliquam aliam magnitudinem quæ ſit Z. quæ vel minor erit, vel maior figura KM. ſi enim eſſet æqualis haberet figura AC. ad figuram KM. eandem proportionem, atque ideo eſſet figura AC. ad analogam KM. vt altitudo ipſius AC. ad altitudinem ipſius KM. quod non conceditur. Sit ergo primum magnitudo Z. minor quam figura analoga KM. cui inſcribatur, ſiue ellipſis ſit ſiue Parabola ſiue Hyperbola, figura multorum angulorum, & numero parium quæ maior ſit magnitudine Z. quæ ponitur minor quam figura analoga KM. & figuræ AC. inſcribatur polygonum ſimiliter ei quod in figura KM. quod ſit AFBGCHDI. ſecundum defin. 5. huius, eodem prorſus modo quo in 15. huius, & ſecunda 12. elementorum ſequetur abductione ad abſurdum eſſe AC. KM. figuras inter ſe, vt altitudines. Nam quia eſt vt altitudo figuræ AC. ad altitudinem ipſius KM. ita polygonum AFGBCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. & vt dicta

(7. 5.) (1. huius.) (19. huius.)

alti-

altitudo ad altitudinem, ita ponitur figura AC. ad magnitudinem Z. erit vt polygonum AFGBCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. ita figura AC. ad magnitudinē Z. & permutando vt polygonum AFBGCHDI. ad figuram AC. ita polygonum KOLXMPNQ. ad magnitudinem Z. sed polygonum AFBGCHLI. est minus figura AC. Igitur & polygonum KOLXMPNQ. est minus magnitudine Z. ostensum autem & maius. Quod est absurdum. Hinc eodem prorsus modo quo in secunda parte præcedentis, & in 2. numero duodecimi, ostendemus magnitudinem Z. non posse esse maiorem figura KM. Igitur illi æqualis erit. Vt igitur altitudo figuræ AC. ad altitudinem figuræ KM. ita figura AC. ad Z. æquale ipsi KM. nempe ad ipsam KM. Quod erat demonstrandum.

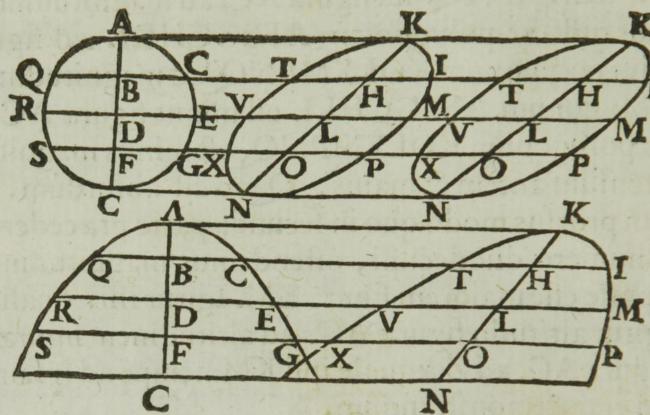
THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

OMnes Ellipses Parabolæ, Hyperbolæ analogæ quæ motu ad datum circulum aut Parabolam aut Hyperbolam & æquidistanter, & æqualiter proportionali inter easdem parallelas descriptæ sunt, tum figuræ datæ tum inter se sunt æquales: item quarum parallelæ lineæ proportionales ad parallelas datæ figuræ eandem habent rationem, inter se sunt æquales.

Inter duas parallelas AK. CM. descriptus sit circulus, aut Parabola, aut Hyperbola ARCE. cuius diameter ad parallelas recta sit AC. & motu aut æqualiter ac æquidistanter proportionali describantur quotlibet ellipses aut Parabolæ, aut Hyperbolæ analogæ KVNM. ita nimirum vt omnes parallelæ proportionales circuli parallelis ellipsium sint æquales, vt ipsæ QB. BC. in circulo ipsis TH. HI. in ellipsi: item RD. DE. ipsis VL. LM. atque ita deinceps:

aut

aut certe secundæ diametri ellipsium VM. VM. habeant eandem rationem ad diametrum circuli RE. vel AC. atque



eodem modo in Parabolis & Hyperbolis. Dico in primo casu ellipses KN. tum inter se, tum circulo esse æquales; in secundo easdem ellipses esse inter se æquales: atque eadem ratione Parabolas aut Hyperbolas KN. analogas tum inter se tum datæ AC. esse æquales; in secundo easdem inter se esse æquales. Nam cum in primo casu parallelæ proportionales TI. aut VM. in ellipsi, parallelis QC. aut RE. circuli sint æquales, sint autem circuli & ellipses analogæ inter easdem parallelas vt parallelæ proportionales; manifestum est circulum AC. cuiuis ellipsium, ipsasque inter se esse æquales. Quod si earumdem ellipsium parallelæ proportionales VM. ad parallelam RC. eandem habeant rationem, erunt æquales inter se; cum autem sint ipsæ ad circulum vt parallelæ proportionales ad parallelas circuli; manifestum est ipsas ad circulum eandem habere rationem, ideoque esse inter se æquales. Atque eadem sequuntur in Parabolis & Hyperbolis analogis. Quod erat demonstrandum.

20. huius.

1. pronunc.

9. 5.

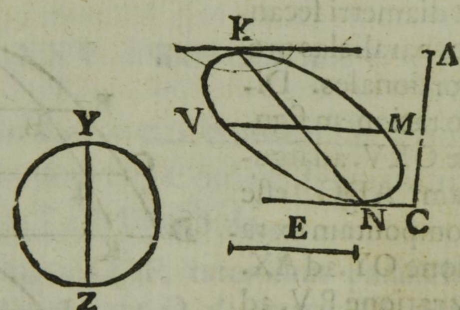
9. 5.

THEO-

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

Ellipsis dato circulo analoga inter diuersas parallelas descripta eam ad circulum rationem habet, quam secunda diameter ellipsis ad rectam quæ altitudini ellipsis & altitudini seu diametro circuli sit tertio loco proportionalis.

Sit ellipsis KN. dato circulo YZ. analoga sed inter diuersas parallelas constituta. sitque secunda diameter ellipsis VM. eiusque altitudo perpendicularis AC. & altitudo seu diameter circuli dati YZ. fiatque vt AC. ad YZ. ita YZ. ad aliam rectam quampiam E. Dico esse vt VM. ad E. ita ellipsin KN. ad circulum YZ. sit eodem motu æquidistanter proportionali quo ellipsis KN. descripta est, descriptus etiam circulus AC. erit vt diameter VM. ad diametrum AC. ita ellipsis KN. ad circulum AC. & vt quadratum diametri AC. ad quadratum diametri YZ. ita circulus AC. ad circulum YZ. vt autem quadratum diametri AC. ad quadratum diametri YZ. ita diameter AC. ad tertiam proportionalem E. Quare cum sit vt diameter VM. ad diametrum AC. ita ellipsis KN. ad circulum AC. & vt AC. ad E. ita circulus AC. ad circulum YZ. erit ex æquali vt diameter VM. ad rectam E. ita ellipsis KN. ad circulum YZ. Quod erat demonstrandum.



2.3.4. huius.

Corol. 20. huius.

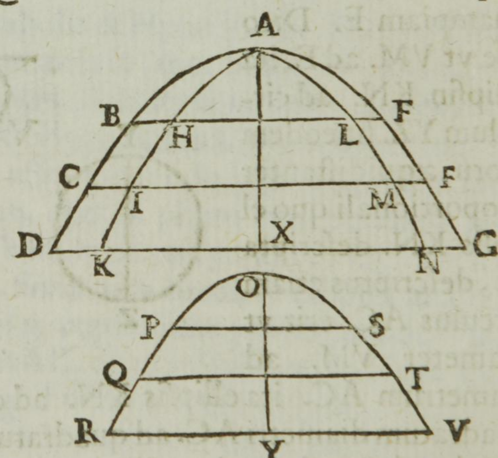
2. 12.

Corol. 20. 6.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

CIrculi atque ellipses inæquales, item Parabolæ, atque Hyperbolæ analogæ inter diuersas parallelas descriptæ habent rationem compositam ex ratione altitudinum, & ratione parallelarum proportionalium.

Sint circulus atque ellipsis ADG. ORV. vel duæ Parabolæ ADG. ORV. vel duæ Hyperbolæ ADG. ORV. inæquales, ADG. maior, minor ORV. sed analogæ, & ductæ sint in figura ADG. parallelæ BE. CF. DG. proportionales parallelis PS. QT. RV. & sint altitudines AX. OY. quæ & diametri secantes parallelas proportionales. Dico rationem figuræ OKV. ad figuram ADG. esse compositam ex ratione OY. ad AX. & ratione RV. ad DG. Sumantur circa AX. rectæ HL. IM. KN. æquales ipsi PS. QT. RV. Erit



AKN. figura analoga ipsi OKV. vt ex demonstratis superio ribus propositionibus constat; quare vt AX. altitudo ad altitudinem OY. ita figura ADG. ad figuram ORV. vt co nstat ex 21. huius, & vt KN. id est RV. ad DG. ita figura AKN. ad figuram ADG. vt probatum est 20. huius. Ergo cum sit vt figura ORV. ad figuram AKN. ita OY. ad

AX.

AX. & vt figura AKN. ad figuram ADG. ita DG. ad KN. erit ratio ORV. ad ADG. composita ex rationibus OY. ad AX. & KN. id est RV. ad DG. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HActenus egimus de figuris quæ motu ita fiunt, vt earum diametri in easdem rationes diuidantur, ipsæque diametri chordas parallelas etiam proportionaliter diuidant. Nunc transeundum ad illas quas definitione sexta huius descripsimus, in quibus chordæ vnius figuræ circa alterum extremum diametri circumuolutæ & in peripheriam figuræ terminatæ; chordis alterius figuræ motu parallelo delatis ac per prioris peripheriæ puncta transeuntibus sunt proportionales.

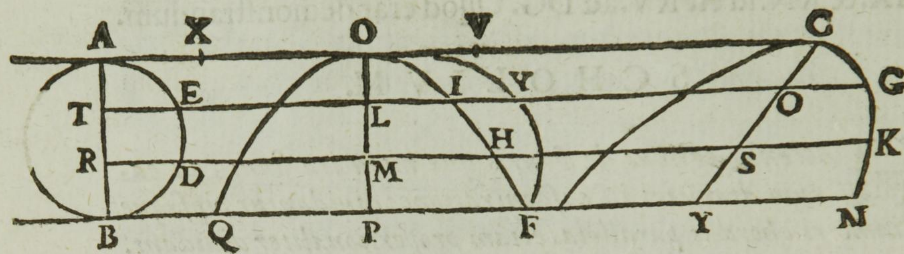
THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI motu ad chordas circuli coniunctas æquidistanter proportionali Conicoides primum describatur illud est Parabola.

Sit Conicoides primum QOF. inter duas parallelas AO. BF. descriptum cuius vertex O. diameter OP. ordinatim applicatæ LI. MH. ipsi BF. parallelæ. Dico Conicoides QOF. esse Parabolam. Sit primum OP. diameter ad extremas parallelas perpendicularis, & intra duas parallelas AO. BF. descriptus sit circa diametrum AB. ad extremas AO. BF. orthogoniam circulus ADB. & productæ IL. HM. secent peripheriam circuli in E. D. & diametrum in T. R. & connectantur AE. AD. item BE. BD. erunt ex definitione 6. huius, rectæ LI. MH. rectis AE. AD. proportionales; sint autem primum æquales: erit vt quadratum MH. ad quadratum LI. ita quadratum AD. ad quadratum AE. sed quadrato AD. æquale est rectangulum

definit. 6. huius.

BAR. & quadrato AE. rectangulum BAT. (nam in trian-
31. 3. gulis rectangulis BDA. BEA. ad D. & E. in quibus ad ba-



ses demissæ sunt perpendiculares DR. ET. ex hypothesi,
est vt BA. ad AD. ita AD. ad AR. & vt BA. ad AE. ita
8. 6. AE. ad AT. ideoque quadrata AD. AE. rectangulis BAR.
17. 6. BAT. æqualia sunt) igitur vt quadratum MH. ad qua-
11. 5. dratum LI ita rectangulum BAR. ad rectangulum BAT.
Lemm. sed rectangula BAR. BAT. rectangulis POM. POL. simi-
1. huius. lia sunt (Nam vt BA. ad AR. ita PO. ad OM. & vt BA.
Definit. 1. ad AT. ita PO. ad OL. similia igitur sunt rectangula BAR.
6. POM. & PAT. POL.) estque vt BA. prima ad PO. se-
22. 6. cundam, ita BA. tertia ad PO. quartam, erit vt rectangu-
lum BAR. ad rectangulum POM. ita rectangulum BAT.
ad rectangulum POL. & permutando, vt rectangulum
BAR. ad rectangulum BAT. ita rectangulum POM. ad re-
ctangulum POL. sed rectangulum BAR. ad rectangulum
BAT. paulo ante ostensum est esse vt quadratum MH. ad
11. 5. quadratum LI. igitur erit vt rectangulum POM. ad re-
ctangulum POL. ita quadratum MH. ad quadratum LI.
1. 6. sed vt rectangulum POM. ad rectangulum POL. ita (po-
sita communi altitudine PO.) MO. ad LO. igitur quadra-
tum MH. ad quadratum LI. est vt MO. ad LO. Iam vero
fiat vt PO. diameter Conicoidis primi ad BA. diametrum
circuli, ita diameter circuli ad tertiam OV. quæ ipsi PO.
in vertice O. aptetur ad angulos rectos, & sit AX. æqualis
17. 6. ipsi AB. quoniam est vt PO. ad AB. ita AB. ad OV. erit re-
ctangulum POV. quadrato BA. æquale. Rursus quoniam
pro-

proportionaliter diuisæ sunt BA. PO. in punctis T. L. erunt rectangula XAT. id est BAT. & VOL. æqualia, rectangulo autem BAT. æquale est quadratum AE. vt supra ostensum est, & quadrato AE. quadratum LI. cum æquales sint, ex descriprione, AE. LI. Igitur rectangulum VOL. quadrato LI. æquale est.

Lemm. 2. huius.

definit. 6. huius.

Iuam vero constat ex 52. 1. Conic. posse inueniri Parabolam cuius diameter sit data OP. vertex punctum O. terminus ipsius OP. Ducta vero quælibet vt QP. a sectione ad diametrum in angulo recto QPO. possit rectangulum POV. sub diametro PO. & recta illi perpendiculari OV. quæ erit latus rectum ex 11. 1. Conicorum. Inuenta iam sit, & imponatur Parabola Conicoidi primo: congruent PO. Conicoidi & PO. Parabolæ cum æquales positæ sint: item QP. vtriusque figuræ, cum tam rectæ QP. quam anguli QPO. ponantur æquales: denique eandem ob causam conuenient OV. in vtraque figura. Igitur aut congruet toti Conicoidi Parabola; aut minime. Ponatur primum non congruere, & vbi deficiunt applicetur ordinatim LIY. quæ secet Conicoidis lineam curuam in puncto I. Parabolæ vero in Y. Quoniam in vtraque figura OV. est recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ, &, vt paulo ante ostensum est, rectangulum LOV. æquale est quadrato LI. & rectangulum LOV. æquale est quadrato LY, æqualia sunt quadrata LI. LY. pars & totum: Quod est absurdum: Congruent igitur Conicoides primum & Parabola: ergo æqualia sunt, & in vnam figuram coincidunt.

52. 1. Conic

11. 1. Conic.

11. 1. Conic. 9. 5.

Sed Conicoides primum, sit non QOF. sed CNY. & angulus CYN. quicumq; & rectæ GO. KS. NY. cum rectis LI. MH. PF. continuatæ ipsis AE. AD. AB. id est LI. MH. PF. proportionales. Dico etiam CNY. esse Parabolam. Cum enim parallelæ sint OC. QY. & proportionales OL. LM. MP. ipsis CO. OS. SY. item proportionales LI. MH. PF. ipsi GO. KS. NY. erit figura CNY. ad Parabolam QOF. analoga, ac motu æquidistanter ad Parabolam pro-

Lem. 1. huius.

defin. 5. huius.

defin. 1. huius.

por-

16.huius.

portionali procreata, igitur & ipsa est Parabola. Quare Conicoides primum est Parabola. Quod demonstrare oportuit.

Vocetur autem Parabola.

COROLLARIVM. I.

Ex dictis manifestum est si diameter Parabolæ PO. sit perpendicularis ad rectas AO. BF. & rectæ LI. MH. PF. chordis AE. AD. AB. æquales, rectangulum POL. esse æquale quadrato LI. & rectangulum POM. quadrato MH. Cum enim æquales sint PO. BA. & OL. AT. erunt rectangula POL. BAT. æqualia, at rectangulum BAT. quadrato AE. & quadratum AE. quadrato LI. æquale est: æqualia igitur sunt rectangulum POL. & quadratum LI. atque eandem ob causam æqualia sunt rectangulum POM. & quadratum MH.

34. 1.

COROLLARIVM. II.

Aperte etiam deducitur, immo cum propositione conuenit quod sequitur: si in sinus arcuum circuli productos, ex punctis in quibus diametrum secant chordæ eorumdem arcuum, vel chordis proportionales transferantur, per earum extrema transiens linea curua Parabola est. Vt in figura prima definitionis 6. huius; si semicirculus ACB. secetur in quotlibet arcus AD. AE. AC. AB. quos subtendunt chordæ AE. AD AC. AB. & sinus EL. DM. CN. & tangens FB. in quibus productis accipiantur LI. MH. NG. BF. ipsis AE. AD. AC. AB. proportionales, curua linea AIHGF. per extrema illarum linearum transiens est Parabola: hoc enim ipsum sub alio titulo in propositione demonstratum est.

COROLLARIVM. III.

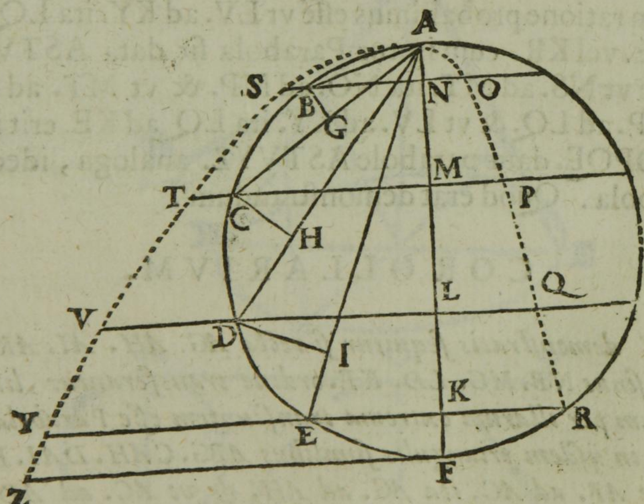
Constat etiam ex vltima parte propositionis, omnes Parabolas quæ motu ad chordas circuli coniunctas pro-

ducuntur esse analogas; atque ideo quæ supra de Parabolis analogis dicta sunt illis conuenire.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

SI a circuli vertice ductæ chordæ æqualium arcuum peripheriam secent in punctis a quibus in sequentes ac maiores chordas perpendiculares ducantur, quæ in sinus eorundem arcuum a punctis in quibus diametrum secant hinc inde transferantur: Curua linea per earum extrema transiens est Parabola.

Sit circulus ACF. cuius diameter AF. vertex A. diuidatur semicirculus ACF. in quotcumque partes æquales



AB. BC. CD. DE. EF. quæ connectantur chordis AB. AC. AD. AE. AF. & ducantur sinus BN. CM. DL. EK. (quos etiam vltra puncta NMLK. produximus) ab exrremis

pun-

punctis B. C. D. E. chordarum, in quibus peripheriam secant, ducantur in sequentes chordas perpendiculares BG. CH. DI. EK. quæ transferantur in sinus a punctis N. M. L. K. ita vt NO. MP. LQ. KE. ipsis BG. CH. DI. EK. sint æquales. Dico lineam curuam AOPQE. esse Parabolam. Sumantur chordis AB. AC. AD. AE. AF. æquales in sinubus productis NS. MT. LV. KY. manifestum est quod per puncta A. S. T. V. Y. Z. transibit Parabola. Hinc cum æquales positi sint arcus BC. CD. DE. EF. æquales, erunt anguli BAC. CAD. DAE. EAF. æquales ideoque in triangulis rectangulis GBA. HCA. IDA. KEA. reliqui anguli ad B. C. D. E. æquales ac omnia illa triangula similia: vt igitur AB. ad BG. ita AC. ad CH. & permutando vt AB. ad AC. id est NS. ad MT. ita BG. ad CH. id est NO. ad MP. Eodem modo cum æquiangula sint triangula ACH. ADI. erit vt AC. ad CH. ita AD. ad DI. & permutando vt AC. ad AD. id est MT. ad LV. ita MP. ad QL. atque eadem ratione probabimus esse vt LV. ad KY. ita LQ. ad KE. vel KR. cum igitur Parabola sit data ASTVYZ. sitque vt NS. ad MT. ita NO. ad MP. & vt MT. ad LV. ita MP. ad LQ. & vt LV. ad KY. ita LQ. ad KE. erit figura AOPQE. datæ parabole ASTVYZ. analoga, ideoque Parabola. Quod erat demonstrandum.

Coroll. 2. 25. huius.

27. 3.

32. 1.

4. 6.

26. huius.

COROLLARIVM.

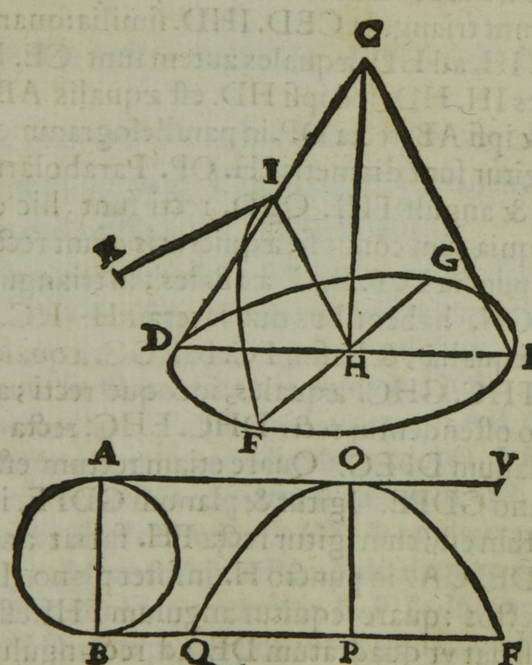
EX demonstratis sequitur si rectæ AG. AH. AI. AK. in sinus NB. MC. LD. KE. ordine transferantur, lineam curuam per illarum extrema transeuntem esse Parabolam. Nam in ijsdem triangulis similibus ABG. CAH. DAI. EAK. est vt AB. ad AC. ita AG. ad AH. & vt AC. ad AD. ita AH. ad AI. & sic deinceps; quare sequitur id quod propositum est, eodem modo quo in propositione in rectis BG. CH. DI. EK. in sinus translatis.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

PArabola recta ac circulo æquichordis, est sectio coni æquilateri cuius basis est circulus habens diametrum diametro circuli congenei duplam, diuidens illum circulum per centrum.

Sint inter parallelas AO. BF. circulus cuius diameter AB. & illi congenea Parabola QOF. cuius diameter PO. ad vtramque parallelarum sit recta. Hinc centro H.



semidiametro HG. quæ ipsi AB. sit æqualis, describatur circulus DFEG. qui sit basis coni æquicruris cuius

Vu vertex

vertex A. seceturque plano per axem quod sectionem faciat triangulum æquicrure CDE. Ductaque per centrum diametro FHG. ad DE. perpendiculari, & diuisa DC. bifariam I. secetur altero plano transeunte per rectam FG. & rectam IH. quæ cum sit parallela ipsi CE. (nam diuisa DE. bifariam in H. & DC. bifariam in I. ex hypothesi, erit vt DH. ad HE. ita DI. ad IC. ideoque parallelæ IH. CE.) constat sectionem FIG. quæ fit illo plano, esse Parabolam. Dico Parabolam FIG. Parabolæ QOF. congruere, ideoque vnam & eandem esse figuram. Nam cum sumpta sit HG. æqualis AB. erit GF. quæ dupla est ipsius GH; etiam dupla ipsius AB. sed ipsius AB. dupla est QF. ex descriptione: igitur æquales sunt bases FG. QF. duarum Parabolarum. Rursus quia parallela est IH. ipsi CE. erunt triangula CED. IHD. similia: quare vt CE. ad ED. ita IH. ad HD. æquales autem sunt CE. ED. igitur æquales IH. HD. sed ipsi HD. est æqualis AB. ex hypothesi, & ipsi AB. recta OP. in parallelogrammo ABPO. æquales igitur sunt diametri IH. OP. Parabolarum FIG. QOF. sed & anguli FHI. QPO. recti sunt, hic ex hypothesi, ille quia cum conus sit æquicruris erunt rectæ a vertice C. ad puncta D. F. E. G. æquales, in triangulis igitur CFH. CGH. habentibus duo latera FH. HC. duobus GH. HC. æqualia, & basim FC. basi GC. æqualem, erunt & anguli FHC. GHC. æquales, ideoque recti; atque eodem modo ostendentur recti DHC. EHC. recta igitur est CH. ad planum DFEG. Quare etiam rectum est planum CDE. plano GDFE. Igitur & planum GDFE. ipsi plano CDF. rectum est; cum igitur recta FH. faciat angulos rectos cum DE. CA. in puncto H. insistet plano DCE. ad angulos rectos: quare sequitur angulum FHI. esse rectum. Denique si fiat vt quadratum DE. ad rectangulum DCE. ita linea KI. ad IC. erit KI. latus rectum, æquale ipsi IC. (nam in triangulo æquicrure DCE. quadratum DE. rectangulo DCE. æquale est) id est ipsi ID. id est ipsi DH. id

[Marginal notes: 15. definit. — 2. 6. — 11.1. Conic. — 15. defin. — Cor. 4 6. — 34. 1. — 8. 1. — 10. definit. — 3. defin. 11. & 4. prop. 11. — 18. 11. — 4. 11. — 3 defin. 11. — 11.1. Conic.]

id est ipsi AB. ipsi autem AB. est etiam æquale latus rectum PV. Parabolæ QOF. (nam si fiat vt PO. ad BA. ita BA. ad aliam OV. erit tertia illa OV. latus rectum Parabolæ QOF. sed æquales sunt BA. PO. Igitur æquales sunt OV. PO. id est BA.) æqualia igitur sunt latera recta OV. KI. Ex quibus per impositionem facile colligitur identitas Parabolarum FIG. QOF. Nam recta PO. rectæ æquali HI. congruet, item angulus ad H. angulo ad P. & recta QF. rectæ æquali FG. & angulus rectus POV. recto HIK. & OV. æquali IK. Quare & curua QOF. curuæ FIG. congruet. Si enim non dicantur congruere fiet abductio ad absurdum eodem prorsus modo quo 16. huius. Congruent igitur: ergo eadem erit figura QOF. ipsi FIG. Quod erat demonstrandum.

15. huius.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

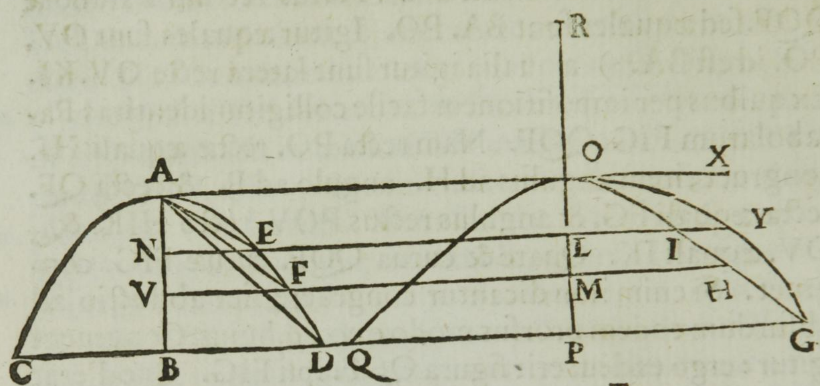
SI motu ad chordas Parabolæ æquidistanter proportionali Conicoides secundum describatur: illud erit Hyperbola.

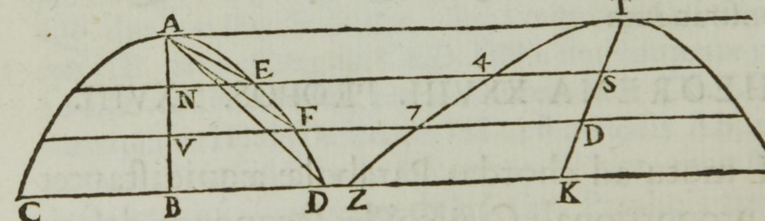
Sint duæ parallelæ AO. BP. inter quas descripta sit Parabola CAD. & motu ad ipsius chordas æquidistanter pro portionali, iuxta modum traditum definitione 6. huius descriptum sit Conicoides secundum QOG. Dico illud esse Hyperbolam. Parabolæ diameter sit AB. Conicoidis PO. vtraque primo perpendicularis ad AO. & BP. Producta autem PO. in R. accipiatur illi æqualis OR. & ipsi OR. sit perpendicularis & æqualis OX: & applicatæ ordinatim LI. MH. producantur, dum Parabolæ diametrum secent in L. V. & ipsius lineam curuam in E. F. & ducantur chordæ AE. AF. AD. quæ primo ponantur æquales ipsis LI. MH. PG. Quoniam RO. ponitur æqualis ipsi OP. & OP. æqualis est ipsi AB. erit RO. æqualis ipsi AB. sed & æquales sunt OL. AN. rectangula igitur ROL. BAN. æqualia sunt: sed

34. 1.

Coroll. 1. 25. huius.

rectangulo BAN. æquale eſt quadratum NE. Igitur rectangulum ROL. æquale eſt quadrato NE. At quadratum





47. .1

AE. eſt æquale quadratis AN. NE. & quadrato AE. eſt æquale LI. cum AE. LI. poſitæ ſint æquales, ergo quadratum LI. eſt æquale rectangulo ROL. & quadrato AN. id eſt OL. ſed rectangulo ROL. & quadrato OL. æquale eſt rectangulum RLO. igitur quadratum LI. eſt æquale rectangulo RLO. Eodemque modo oſtendemus quadratum MH. eſſe æquale rectangulo RMO. vt igitur rectangulum RLO. ad rectangulum RMO. ita quadratum LI. ad quadratum MH. Cumque æqualia ſint rectangulum RLO. & quadratum LI. & æquales etiam poſitæ RO. OX. patet eſſe vt rectangulum RLO. ad quadratum LI. ita RO. ad OX. Quæ proprietates etiam in Hyperbola demonſtratæ ſunt lib. 1. Conic. prop. 21. Vocetur autem RO. tranſuerſum figuræ latus & OX. rectum. Hinc eodem prorſus modo quo vltima parte 17. huius, demonſtrabimus Conicoides ſecundum eſſe Hyperbolam. Conſtat enim ex

53. 1. Conic. posse inueniri Hyperbolam cuius latus rectum OX. transuersum OR. & diameter OP. Ducta vero qualibet PG. a sectione ad diametrum in angulo GPO. sit vt RO. ad OX. ita rectangulum RPO. ad quadratum PG. congruent rectæ OP. Hyperbolæ inuentæ & OP. Conicoidis secundi, cum sint æquales, item rectæ PG. Hyperbolæ & PG. Conicoidis, eo quod sint æquales, & anguli ad P. æquales, & ob eandem rationem congruent OX. Hyperbolæ & Conicoidis, & RO. vtriusque figuræ. Ergo vel figuræ totæ congruent, vel minime. Ponantur primum non congruere, ac vbi deficiunt applicetur ordinatim LIY. quæ secet Conicoides in I. Hyperbolam in Y. Quoniam in vtraque figura OX. est recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ, & RO. latus transuersum; erit ex paulo ante demonstratis, vt RO. ad OX. ita rectangulum RLO. ad quadratum LI. & vt RO. ad OX. ita rectangulum RLO. ad quadratum LY. æqualia igitur sunt quadrata LI. LY. pars & totum: quod est absurdum. Congruent igitur Hyperbola ac Conicoides secundum: ergo in vnam figuram conincident, quare Conicoides secundum rectum & circulo æquichorde, est Hyperbola.

21. 1. Conicorum.
9. 5.

Sed Conicoides secundum sit non QOG. sed TZK. & angulus TKZ. quicumque, ac rectæ S4. D7. KZ. cum rectis LI. MH. PG. continuatæ, ipsis AE. AF. AD. id est LI. MH. PG. proportionales. Dico etiam TZK. esse Hyperbolam. Cum enim parallelæ sint OT. PK. & proportionales OL. LM. MP. ipsis TS. SD. DK. item proportionales LI. MH. PG. ipsis S4. DT. KZ. erit figura TZK. ad Hyperbolam QOG. analoga, ac motu æquidistanter ad Hyperbolam proportionali procreata: igitur & ipsa Hyperbola. Quare Conicoides secundum est Hyperbola. Quod demonstrare oportuit: *Vocetur Hyperbola conchordium prima.*

Lemm. 1. huius.
defin. 5. huius.
defin. 1. huius.
17. huius.

CO-

COROLLARIVM I.

Constat ex vltima parte huius propositionis, omnes Hyperbolas quæ motu ad chordas parabolæ coniunctas æquidistanter proportionali producuntur esse analogas; ideoque omnes affectiones Hyperbolarum analogarum illis conuenire.

COROLLARIVM II.

Manifestum item est si diameter Hyperbolæ PO. sit perpendicularis ad extremas parallelas, & rectæ LI. MH. PG. ipsis AE. AF. AD. æquales, rectangula RLO. RMO. RPO. quadratis LI. MH. PG. singula singulis esse æqualia. Hoc enim in propositione probatum est.

COROLLARIVM III.

Denique, quod etiam de Parabola in 25. huius annotatum est, si in ordinatim applicatas Parabolæ productas ex punctis in quibus diametrum secant chordæ Parabolæ, vel chordis proportionales transferantur, per earum extrema transeuntem curuam esse Hyperbolam.

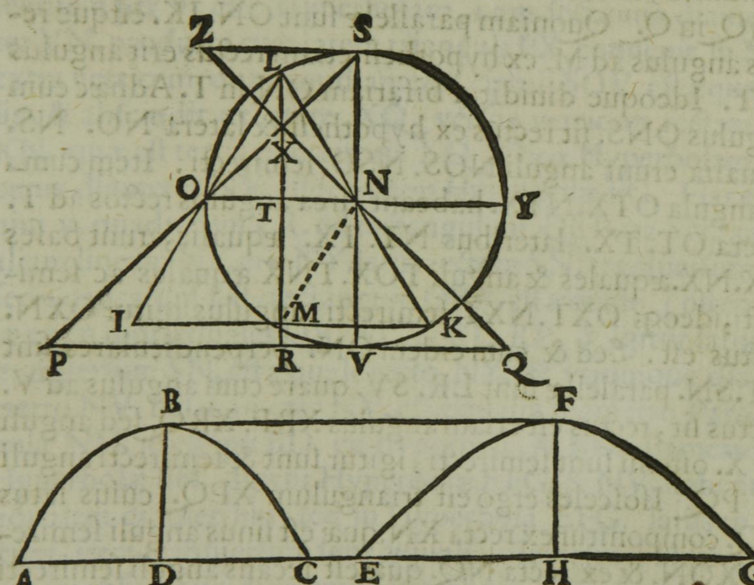
THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

Hyperbole prima, rectangula, ac Parabolæ æquichordis est sectio coni æquicruris rectanguli, cuius latus est æquale compositæ ex sinu recto & secante anguli semirecti in circulo, in quo diameter est latus coni æquilateri cuius sectione fit Parabola, ac semidiameter diametro ipsius Hyperbolæ æqualis, ita vt

dicta

dicta sectio transeat per lineam æquidistantem rectæ ductæ a vertice ad centrum basis, & abscindentem ex latere coni ad verticem tertiam ipsius lateris partem.

Sit inter duas parallelas BF. AG. parabola congenea ABC. cuius diameter ad parallelas recta BD. Item congenearum prima Hyperbola EFG. cuius diameter FH. ad parallelas itidem recta, & in qualibet linea recta sumatur IK. dupla ipsius BD. aut FH. super qua erigatur triangu-



lum æquilaterum, circa quod vertice L. basi IK. axe LM. perpendiculari ad basim intelligatur descriptus conus æquilaterus, in quo sectio transiens per verticem & diametrum basis sit idem triangulum æquilaterum LIK. cuius latus LK. diuidatur bifariam in N. & connectatur NM. (punctum autem M. diuidit basim IK. bifariam) manife- Schol. in 26. 1.

stum

16. huius. ſtum eſt ſectionem tranſeuntem per NM. efficere in ſuperficie coni parabola ABC. Ducatur ipſi IK. parallela NO. ſecans axem ſeu perpendicularem LM. in T. & latus LI. in O. ac centro N. deſcribatur circulus OMKL. qui quidem tranſibit per M. K. L. Cum enim diuiſa ſit bifariam LK. in N. erunt LN. NK. æquales, & cum NO. parallela ſit ipſi

2. & 4. 6. IK. erit vt LK. ad KI. ita LN. ad LO. æquales autem ſunt LK. KI. æquales igitur LN. NO. ſed & NK. NM. æquales ſunt, medietates nempe æqualium laterum LK. KI. Hinc ducatur per centrum SNV. ipſi ON. perpendicularis, &

16. 6. per V. ad SV. perpendicularis PVQ. tangens circulum in V. infinita, cui occurrat SO. in P. ſecans LR. in X. & recta XNQ. in Q. Quoniam parallelæ ſunt ON. IK. eſtque re-

28. 1. ctus angulus ad M. ex hypotheſi etiam rectus erit angulus

Schol. in 26. 1. ad T. Ideoque diuiditur bifariam ON. in T. Adhæc cum angulus ONS. ſit rectus ex hypotheſi, & latera NO. NS.

5. & 32. 1. æqualia erunt anguli NOS. NSO. ſemirecti. Item cum triangula OTX. NTX. habeant circa angulos rectos ad T. latera OT. TX. lateribus NT. TX. æqualia, erunt baſes OX. NX. æquales & anguli TOX. TNX. æquales ac ſemirecti, ideoq; OXT. NXT. ſemirecti, angulus igitur OXN. rectus eſt. Sed & cum eidem ON. perpendiculares ſint

29. 1. LT. SN. paralellæ ſunt LR. SV. quare cum angulus ad V. rectus ſit, rectus eſt etiam angulus XRP. XRQ. ſed anguli ad X. oſtenſi ſunt ſemirecti, igitur ſunt & ſemirecti anguli

6. 1. ad PQ. Iſoſceles ergo eſt triangulum XPQ. cuius latus XQ. componitur ex recta XN. quæ eſt ſinus anguli ſemirecti XQN. & ex recta NQ. quæ eſt ſecans anguli ſemirecti

15. 1. VNQ. (nam cum ſemirectus ſit XNS. etiam angulus ad verticem VNQ. eſt ſemirectus, cuius tangens VQ. ſecans NQ. ac ipſa XN. eſt tertia pars totius XQ. producta enim NX. dum tangenti ſemirecti SZ. occurrat in Z. erit NZ. ſecans ſemirecti, ac tam angulus SNZ. quam SZN. in triangulo NSZ. ſemirecti, ideoque æquales NS. SZ. ſed & recti

5. 1. 8. 6. ſunt anguli NSZ. NXS. vt igitur NS. æqualis ad a qualem

SZ.

SZ. ita NX. æqualis ad æqualem XZ. quare NX. eſt medietas ſecantis ſemirecti NZ. id eſt NQ. ac proinde tertia pars totius XQ.) Iam vero circa verticem X. axem XR. circulumque cuius diameter PQ. vertatur triangulum XPQ. efformabitur Conus PXQ. æquicruris rectangulus, cuius latus XQ. compoſitum ex ſinu recto XN. & ſecante NQ. anguli ſemirecti in circulo SOV. ac diameter circuli eſt LK. latus coni æquilateri LIK. cuius ſectione NM. fit Parabola congenea. Sit autem idem triangulum XPQ. triangulum per axem, ac per diametrum baſis, & ſecetur conus ſecundum rectam NV. quæ producta productæ PX. occurrat in S. Manifeſtum eſt ſectionem tranſeuntem per V. eſſe Hyperbolam, nam ſectionis diameter VN. producta cum latere trianguli PX. conuenit in S. extra verticem, quæ ſemidiametro circuli SOV. eſt æqualis, & abſcindit ex latere XQ. verſus verticem rectam XN. quæ eſt tertia pars lateris XQ. Dico Hyperbolam cuius diameter NV. eſſe eandem Hyperbolæ FG. Fiat enim vt quadratum LR. ad rectangulum QRP. ita SN. ad aliam lineam NY. erit NY. latus rectum SN. tranſuerſum, ſed quadratum LR. rectangulo QRP. eſt æquale (oſtenſæ enim ſunt æquales QR. RL. & RL. RP.) igitur latus tranſuerſum SN. eſt æquale recto NY. & vtrumque diametro NV. ſed diameter NV. eſt æqualis diametro Parabolæ NM. id eſt ipſi BD. ex hypotheſi, & BD. diametro Hyperbolæ FH. Igitur Hyperbolæ EFG. & NV. habent æqualem diametrum, ſed in Hyperbola EFG. latus rectum, item tranſuerſum ſunt æqualia diametro FH. ergo latus tranſuerſum, & rectum Hyperbolæ EFG. ſunt æqualia lateri recto & tranſuerſo Hyperbolæ quæ tranſit per NV. ſed & rectangula ponitur vtraque Hyperbola; Cum ergo Hyperbolæ EFG. & quæ per NV. habeant æqualem diametrum, æquale latus rectum, æquale tranſuerſum, æqualeſque angulos efficiant ordinatim applicatæ ad diametrum nimirum rectos; Conſtat euidenter ex 53. 1. Conico-

1. definit. 1. Conic.

3. 1. Conic.

12. 1. Conic.

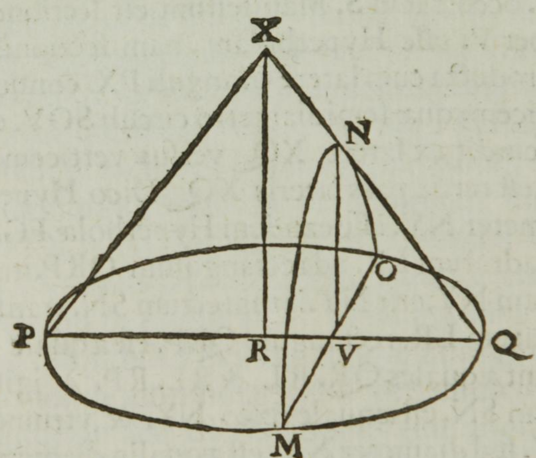
15. definit.

19. huius.

nicorum,& ex impositione;illas Hyperbolas sibi congruere ideoque vnam,& eandem esse Hyperbolam. Quod fuerat demonstrandum.

COROLLARIVM.

HInc aperte colligitur si conus Isosceles rectangulus quilibet plano per tertiam lateris partem versus verticem, axi parallelo secetur, sectionem esse Hyperbolam, congenearum primæ similem. Vt si conus Isosceles PXQ.



rectangulus ad X. sumpta XN. tertia lateris parte secetur plano per NV. parallelo axi XR. sectio MNO. erit Hyperbola similis Hyperbolæ EFG. Nam cum omnia in vtraque similia demonstrentur, ex dictis erunt & ipsæ inter se similes.

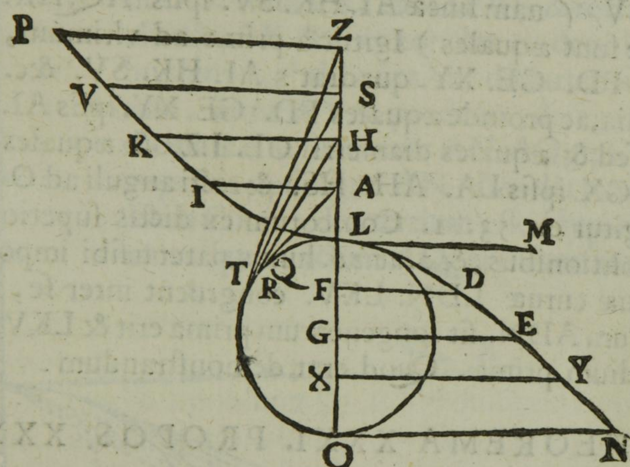
THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI recta linea extra circulum ita moueatur, vt altero extremo diametrum productam

secet,

ſecet, altero tangat: & per puncta vbi ea diametrum ſecat, recta ad diametrum perpendicularis continuo moueatur tangenti æqualis: linea extremitate dictæ perpendicularis deſcripta erit Hyperbola conchordium prima.

Sit circulus ACO. cuius diameter LO. perpendicularis ad parallelas tangentes LM. ON. quæ producatur extra peripheriam, & moueatur tangens quælibet a puncto L. verſus A. H. S. ita vt diametrum productam ſecet in A.



circulum tangat in Q. hinc diametrum ſecet in H. S. circulum tangat in R. T. &c. & per puncta A. H. S. moueatur continuo perpendicularis ad diametrum tangentibus æqualis, nempe AI. ſit æqualis AQ. & HK. ipſi HR. & SV. ipſi ST. & ZB. ipſi ZP. Dico lineam curuam LIKV. eſſe hyperbolam congenearum primam. Sit deſcripta circa LO. Hyperbola prima cuius diameter LO. eadem quæ circuli in qua ſumantur rectæ LF. LG. LX. LO. ipſi LA. LH. LS. LZ. æquales, & applicentur ordinatim FD. GE. XY. erit rectangulum ZFL. æquale quadrato FD. &

 ZGL.

ZGL. æquale quadrato SE. & ZXL. æquale quadrato XY. atque ita deinceps : Rectangulo autem ZFL. æquale, est rectangulum OAL. (æquales enim ponuntur OL. ZL. item LF. LA. quare æquales OA. ZF.) & rectangulo ZGL. rectangulum OHL. & rectangulo ZXL. rectangulum OSL. &c. sed & rectangulo ZFL. æquale est quadratum FD. & rectangulo ZGL. quadratum GE. & rectangulo ZXS. quadratum XY. &c. Item rectangulo OAL. est æquale quadratum AQ. rectangulo OHL. quadratum HR. & rectangulo OSL. quadratum AT ipsis autem quadratis AQ. AR. AT. æqualia sunt quadrata AI. HK. SV. (nam lineæ AI. HK. SV. ipsis AQ. AR. AT. positæ sunt æquales) Igitur a primo ad vltimum, quadrata FD. GE. XY. quadratis AI. HK. SV. &c. sunt æqualia, ac proinde æquales FD. GE. XY. ipsis AI. HK. SV. sed & æquales diametri OL. LZ. & æquales LF. FG. GX. ipsis LA. AH. HS. & recti anguli ad O. & Z. Igitur ex 53. 1. Conicorum ex dictis superioribus propositionibus, & 9. ac 16. huius, patet si sibi imponantur duæ curuæ LDN. LKV. congruent inter se, ideoque cum ADN. sit congenearum prima erit & LKV. conchordium prima. Quod erat demonstrandum.

19. huius

36. 3.

2. pronunc.

53. 1. Conicorum.

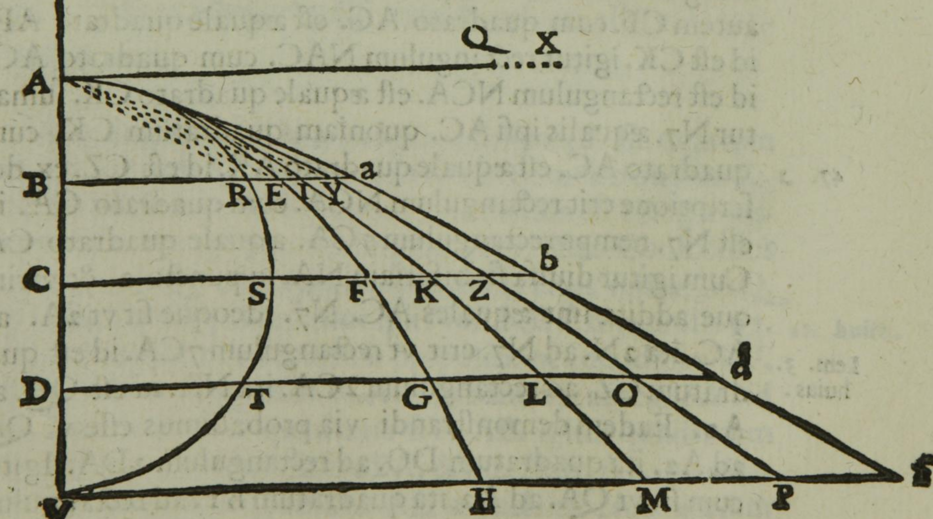
THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

Conicoides tertium rectangulum, & primæ Hyperbolæ æquichorde est Hyperbola, cuius latus rectum est æquale lateri recto primæ Hyperbolæ; transuersum recti dimidium.

Inter duas parallelas AX. VM. descriptus sit circulus ASV. circa diametrum AV. perpendicularem ad parallelas, & circa eandem diametrum Conicoides primum AFH. Conicoides secundum AKM. Conicoides tertium AYZ. Diuisaque AV. verbi gratia, in quotlibet & quas-

libet

libet partes in punctis B. C. D. ducantur ordinatim applicatæ BY.CZ.DO.&c.ſecantes Conicoidea ordine in punctis B. R. E. I. Y. item C. S. F. K. Z. & in punctis D. T. S. L. O. &c. & a puncto A. ducantur ad puncta ſectionum chordæ AR. AE. AI. AY. atque ita a vertice A. ad reliqua puncta intelligantur chordæ, quibus æquales erunt in ordinatim applicatis rectæ BE. BI. BY. nempe recta BE. chordæ AR. recta BI. chordæ AE. & recta BY. chordæ AI. atque ita in reliquis, recta CF. chordæ AS. recta CK. chordæ AF. & recta CZ. chordæ AK. &c. vt conſtat ex definitionibus huius, ac deſcriptione dictarum figurarum. Hinc in VA. producta, & in perpendiculari AX. ſumantur AN. AQ. ipſi VA. æquales, ipſiuſque AN. dimidia pars A2. Dico Conicoides tertium eſſe Hyperbolã, cuius latus rectum AQ. tranſuerſum A2.



Quo-

Quoniam æquales ſunt VA. AB. rectis NA. AB. erit rectangulum VAB. æquale rectangulo NAB. ſed rectangulo VAB. eſt æquale quadratum AR. id eſt BE. ex hypotheſi. Igitur rectangulo NAB. eſt æquale quadratum BE. quadratum autem BE. cum quadrato BA. eſt æquale quadrato AE. id eſt BI. igitur rectangulum NAB cum quadrato AB. id eſt rectangulum NBA. eſt æquale quadrato BI. ſumatur N6. æqualis ipſi AB. quoniam quadratum BI. cum quadrato AB. eſt æquale quadrato AI. id eſt BY. ex deſcriptione, erit rectangulum NBA. cum quadrato AB. id eſt N6. nempe rectangulum 6BA. æquale quadrato BY. cum igitur diuiſa ſit bifariam NA. in puncto 2. & vtrinque additæ ſint æquales AB. N6. ideoque ſit vt 2A. ad AB. ita 2N. ad N6. erit vt rectangulum 6BA. id eſt quadratum BY. ad rectangulum 2BA. ita NA. id eſt QA. latus rectum ad A2. tranſuerſum. Eodem modo quoniam æquales ſunt VA. AC. rectis NA. AC. erit rectangulum VAC. æquale rectangulo NAC. ſed rectangulo VAC. eſt æquale quadratum AS. id eſt CF. ex hypotheſi: igitur rectangulo NAC. eſt æquale quadratum CF. quadratum autem CF. cum quadrato AC. eſt æquale quadrato AF. id eſt CK. igitur rectangulum NAC. cum quadrato AC. id eſt rectangulum NCA. eſt æquale quadrato CK. ſumatur N7. æqualis ipſi AC. quoniam quadratum CK. cum quadrato AC. eſt æquale quadrato AK. id eſt CZ. ex deſcriptione erit rectangulum NCA. cum quadrato CA. id eſt N7. nempe rectangulum 7CA. æquale quadrato CZ. Cum igitur diuiſa ſit bifariam NA. in puncto 2. & vtrinque additæ ſint æquales AC. N7. ideoque ſit vt 2A. ad AC. ita 2N. ad N7. erit vt rectangulum 7CA. id eſt quadratum CZ. ad rectangulum 2CA. ita NA. id eſt QA. ad A2. Eadem demonſtrandi via probabimus eſſe vt QA. ad A2. ita quadratum DO. ad rectangulum 2DA. Igitur cum ſit vt QA. ad A2. ita quadratum BY. ad rectangulum 2BA. & vt QA. ad A2. ita quadratum CZ. ad rectangulum

[Margin notes: Coroll. 1. 13. huius. — 47. 1. — 47. — Lemm. 3. huius. — Coroll. 1. 13. huius. — 47. 1 — Lem. 3. huius.]

lum 2CA. erit vt quadratum BY. ad rectangulum 2BA. ita quadratum CZ. ad rectangulum 2CA. & permutando, vt quadratum BY. ad quadratum CZ. ita rectangulum 2BA. ad rectangulum 2CA. eodemque modo ostendemus esse vt quadratum DO. ad quadratum CZ. aut BY. ita rectangulum 2DA. ad rectangulum 2CA. aut 2BA. Quare cum hæ sint proprietates Hyperbolæ ex 21. primi Conicorum, manifestum est ex dictis in propositionibus 17. & 28. huius Hyperbolam rectangulam cuius latus rectum AQ. transuersum AZ. diameter AV. congruere cum Conicoide AZP. ideoque Conicoides tertium esse Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. transuersum AZ. Quod fuit demonstrandum.

11. 5.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

Conicoides quartum rectangulum, & secundæ Hyperbolæ æquichorde est Hyperbola: cuius latus rectum est æquale lateri recto primæ Hyperbolæ, transuersum est recti tertia pars.

Sint omnia quæ superiori propositione, & sit quartum Conicoides Aabf. ordine descriptum eo modo quo in definitione, ac superiori propositione dictum est: Rectæ autem NA. accipiatur tertia pars A3. Dico Conicoides quartum AQ. esse Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. transuersum A3. Sumantur ipsi N6. id est AB. æqualis 67. Nam vt constat ex superiori propositione, quadrato BY. æquale est rectangulum 6BA. Quadratum autem AY. id est Ba. est æquale quadratis BY. AB. igitur quadratum Ba. est æquale rectangulo 6BA. & quadrato AB. quadrato autem 6BA. & quadrato AB. æquale est rectangulum 7BA. (cum æquales sumpti sint N6, 67. AB. erunt 7A.

27. huius.

6B.

6B. æquales & rectangulum 7AB. rectangulo 6BA. æquale, ideoque rectangulum 7BA. rectangulo 6BA. cum quadrato AB. æquale) Quare cum æquales sint AB. N6. 67. erit AB. aggregati magnitudinum AB. N6. 67. tertia pars: sed etiam A3. est tertia pars ipsius AN. vt igitur AB. N6. 67. ad AB. ita AN. ad A3. & diuidendo vt N7. ad AB. ita N3. ad A3. Igitur per Lemma 3. huius, erit vt rectangulum 7BA. id est quadratum Ba. illi æquale ad rectangulum 3BA. ita NA. id est AQ. latus rectum ad transuersum A3. Eodem prorsus modo quo priori parte huius, & quo præcedenti, demonstrabimus esse vt quadratum C6. ad rectangulum 3CA. ita QA. ad A3. Hinc esse vt Quadratum Ba. ad quadratum C6. ita rectangulum 3BA. ad rectangulum 3CA. Quare cum hæ sint proprietates Hyperbolæ ex 21. 1. Conicorum; constat ex ijs quæ dicta sunt in propositionibus huius Hyperbolam rectangulam cuius latus rectum AQ. transuersum A3. diameter AV. congruere cum Conicoide Abf. ideoque Conicoides quartum rectangulum esse Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. transuersum A3. Quod erat &c.

Lemm. 3. huius.

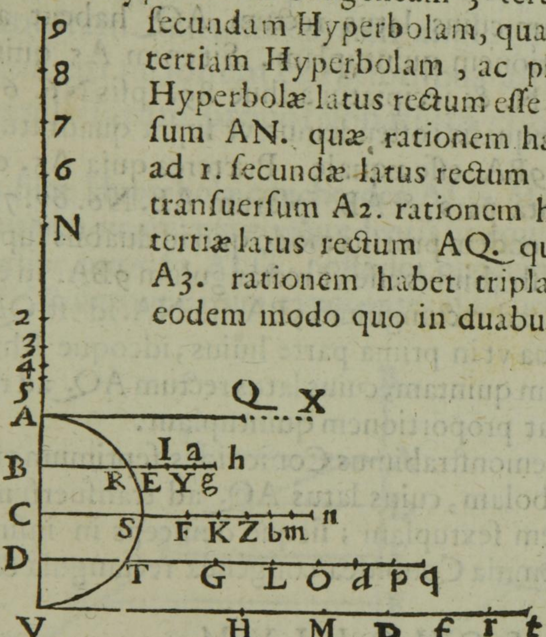
THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

OMnia Conicoidea rectangula & prioribus æquichordia primo excepto sunt Hyperbolæ, quæ si ordine accipiantur eorum latera transuersa rationem habent inter se a numeris ab vnitate serie naturali progredientibus, seu ab exponentibus denominatam.

Sit AV. diameter communis omnium conoideum congeneorum A. vertex AN. latus transuersum, cui æqualis sit perpendicularis AQ. Hinc ducta BH. infinita ordinatim

dinatim applicata, item recta per punctum E. intelligatur transite conicoides primum, per punctum I. secundum; per Y. tertium; per, a. quartum, per g. quintum; per h. sextum, ac sic deinceps: Dico hæc omnia conicoidea, primo excepto, esse Hyperbolas, ac latus rectum ad transuersum in prima Hyperbola habere rationem quam 1. ad 1. in secunda duplam, in tertia triplam, in quarta quadruplam, & sic in infinitum. Manifestum est Conicoides primum AE. esse Parabolam, secundum AI. esse primam Hyperbolam congeneam; tertium AY. esse secundam Hyperbolam, quartum Aa. esse tertiam Hyperbolam, ac primæ quidem Hyperbolæ latus rectum esse AQ. transuersum AN. quæ rationem habent quam 1. ad 1. secundæ latus rectum AQ. quod ad transuersum A2. rationem habet duplam, tertiæ latus rectum AQ. quod ad rectum A3. rationem habet triplam: Iam vero eodem modo quo in duabus superioribus probabimus, quartum conicoides Ag. esse quartam Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. ad transuersum habet rationem quadruplam. Reuocentur enim in memoriam duæ superiores propositiones, & sit A4. quarta pars ipsius AN. & præter partes acceptas N6. 67. æquales ipsi AB. accipiatur etiam 78. eidem AB. æqualis; eadem omnino ratione qua in duabus superioribus probabimus quadratum gB. rectangulo 8BA. esse æquale. Rursus quia A4. est ipsius AN. quarta pars & AB. ipsarum AB.

16. huius.
21. huius.
27. huius.
28. huius.



N6. 67. 68. quarta pars, eodem penitus modo quo in duabus superioribus demonstrabimus esse vt rectangulum 8BA. id est quadratum gB. ad rectangulum 4BA. ita NA. id est QA. ad A4. Item vt quadratum mC. ad rectangulum 4CA. ita QA. ad A4. ideoque vt Quadratum Bg. ad quadratum Cm. ita rectangulum 4BA. ad rectangulum 4CA. sicque propter eandem causam quam in duabus superioribus attulimus, conoides transiens per AGM. esse Hyperbolam quartam.

Neque aliter efficietur Conicoides sextum esse quintam Hyperbolam cuius latus rectum AQ habeat ad transuersum rationem quintuplam. Sit enim A5. quinta pars totius AN. & accipiatur adhuc 89. ipsis N6. 67. 78. & ipsi AB. æqualis; ostendemus vt supra quadratum Bh. rectangulo 9BA. esse æquale. Præterea quia A5. est ipsius AN. quinta pars, & AB. ipsarum AB. N6. 67. 78. 89. quinta pars eodem prorsus modo quo in duabus superioribus demonstrabimus esse vt rectangulum 9BA. id est quadratum Bh. ad rectangulum 5BA. ita NA. id est QA. ad A5. ac reliqua vt in prima parte huius, ideoque Ahn. esse Hyperbolam quintam, cuius latus rectum AQ. ad rectum A5. habeat proportionem quintuplam.

Atque ita demonstrabimus Conicoides septimum esse sextam Hyperbolam, cuius latus AQ. ad transuersum habeat rationem sextuplam; sicque deinceps in infinitum. Quare omnia Conoidea congenea rectangula &c.

SCHOLIVM.

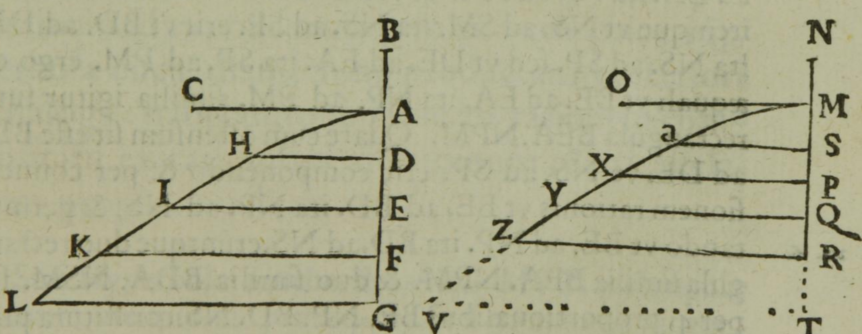
Exponentes vocamus hic, & sequentibus propositionibus numeros quibus ordo Hyperbolarum quæ sese mutua atque ordinata generatione procreant, designatur, vt si ordine disponantur prima, secunda, tertia, quarta &c. Hyperbola earum exponentes dicentur numeri 1. 2. 3. 4. *atque ita deinceps.*

THEO-

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

SI Hyperbolæ conchordes rectangulæ prioribusque æquichordes accipiantur, atque diameter prioris ad partem diametri posterioris a vertice sumptam rationem habeat quam exponens posterioris ad exponentem prioris: erit prior Hyperbola posteriori Hyperbolæ circa sumptam diametri partem analoga; habebuntq; inuicem rationem ex rationibus altitudinum, & parallelarum proportionalium compositam.

Sint Hyperbolæ conchordes ALG. MVT. rectangulæ quarum vnaquæque præcedentis sit æquichordis; atque ordine prior sit ALG. posterior quocumque interuallo MVT. sintque earum exponentes quilibet numeri (ver-



bi gratia prioris 3. posterioris 4. nempe prior Hyperbola ordine sit tertia, posterior quarta) & latera recta æqualia (ex 33. huius) AC.MO. transuersa AB. MN. quæ proportionem habent ab exponentibus denominatam, nempe vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hy-

33. huius.
33. huius.

perbolæ ALG. ita latus transuersum AB. seu MO. ad transuersum MN. Ducantur item diametri AG. NT. & fiat vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hyperbolæ ALG. (vt in proposito 4. ad 3.) ita diameter AG. ad partem diametri MR. & per R. ordinatim applicetur RZ. secans suam Hyperbolen in Z. Dico Hyperbolam ALG. Hyperbolę MZR. esse analogam, & habere rationem compositam ex ratione altitudinum AG. MR. & parallelarum GL. RZ. Diuidantur AG. MR. in totidem partes æquales in punctis D. E. F. G. & S. P. Q. R. per quæ ducantur ordinatim applicatæ DH. EI. FK. GL. & Sa. PX. QY. RZ. Quoniam tam multiplex est GA. ipsius AD. quam MR. ipsius MS. erit vt GA. ad RM. ita DA. ad SM. sed vt GA. ad RM. ita AB. ad MN. igitur vt AB. ad MN. ita AD. ad MS. & DE. ad SP. & EF. ad PQ. & FG. ad QR. Quare cum sit vt AB. ad MN. ita AD. ad MS. erit permutando & componendo vt BD. ad DA. ita NS. ad SM. similia igitur sunt rectangula BDA. NSM. Rursus cum æquales sint DA. DE. & MS. SP. ex hypothesi, erit vt ED. ad EA. ita PS. ad PM. & vt BD. ad DA. ita BD. ad DE. itemque vt NS. ad SM. ita NS. ad SP. erit vt BD. ad DE. ita NS. ad SP. sed vt DE. ad EA. ita SP. ad PM. ergo ex æquali vt BE. ad EA. ita NP. ad PM. similia igitur sunt rectangula BEA. NPM. Quare cum ostensum sit esse BD. ad DE. vt NS. ad SP. erit componendo & per conuersionem rationis vt BE. ad BD. ita NP. ad NS. & permutando vt BE. ad NP. ita BD. ad NS. eruntque duo rectangula similia BEA. NPM. & duo similia BDA. NSM. super 4. proportionalibus BE. NP. BD. NS. constituta proportionalia: vt igitur rectangulum BEA. ad rectangulum NPM. ita rectangulum BDA. ad rectangulum NSM. & permutando vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA. ita rectangulum NPM. ad rectangulum NSM. sed vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA. ita quadratum EI. ad quadratum DH. & vt rectangulum NPM. ad rectangulum

[Margin notes: 15. 5. — 15. 5. — 22. 6. — 21. 1. Conic.]

ctangulum

ctangulum NSM. ita quadratum PX. ad quadratum Sa. vt igitur quadratum EI. ad quadratum DH. ita quadratum PX. ad quadratum Sa. ideoque vt EI. ad DH. ita PX. ad Sa. atque eodem modo demonſtrabimus eſſe vt FK. ad EI. & GL. ad FK. ita QY. ad PX. & RZ. ad QY. Quare cum in eadem ratione diuiſæ ſint diametri AG. MR. & parallelæ DH. EI. FK. GL. ipſis Sa. PX. QY. RZ. ſint proportionales; analogæ ſunt Hyperbolæ ALG. MVT. quæ cum ſint inæquales, & inter diuerſas parallelas habent etiam rationem compoſitam ex rationibus altitudinum AG. MR. & parallelarum proportionalium GL. RZ. Quod erat demonſtrandum.

11. 5.
22. 6.
4. defin. huius.
24. huius.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXV.

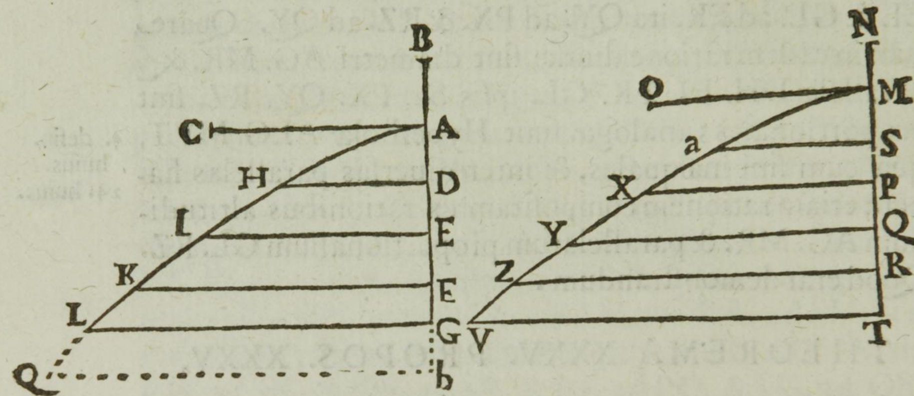
SI Hyperbolæ conchordes rectangulæ prioribuſque æquichordes ſumantur, atque diameter prioris producta ad diametrum poſterioris rationem habeat quam exponens poſterioris ad exponentem prioris: erit prior Hyperbola circa diametrum productam poſteriori Analoga: habebuntque inuicem rationem compoſitam ex rationibus altitudinum, & parallelarum proportionalium.

Sint Hyperbolæ conchordes ALG. MVT. rectangulæ quarum vnaquæque præcedenti ſit æquichordis; atque ordine prior ſit ALG. poſterior quocumque interuallo MVT. ſintque earum exponentes quilibet numeri (exempli gratia prioris 3. poſterioris 4. nempe prior Hyperbola ordine ſit tertia, poſterior quarta) & latera recta æqualia (ex 33. huius) AC. MO. tranſuerſa AB. MN. quæ proportionem habent (ex 33. huius) ab exponentibus deno-

33. huius.

mina-

minatam, nempe vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hyperbolæ ALG. ita latus rectum AC. seu MO. ad transuersum MN. Ducantur item diametri AG. NT.



& fiat vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hyperbolæ ALG. (vt in proposito 4. ad 3.) ita diameter AG. producta in d. ad diametrum MT. & ptoducta Hyperbola ad diametrum Ad. ordinatim applicetur de. secans Hyperbolam productam in e. Dico Hyperbolam AED. Hyperbolæ MVT. esse analogam; & habere dictas Hyperbolas rationem compositam ex rationibus altitudinum AD. MT. & parallelarum proportionalium DE. TV. Diuidantur AD. MT. in totidem partes æquales in punctis D. E. F. G. d. & S. P. Q. R. T. per quæ ordinatim applicentur DH. EI. FK. GL. de. & Sa. PX. QY. RZ. TV. Quoniam tam multiplex est dA. ipsius AD. quam TM. ipsius MS. erit vt dA. ad TM. ita DA. ad SM. sed vt dA. ad TM. ita AB. ad MN. igitur vt AC. ad MN. ita AD. ad MS. & DE. ad SP. & EF. ad PQ. & FG. ad QR. & Gd. ad RT. Quare cum sit vt AB. ad MN. ita AD. ad MS. erit permutando & componendo, vt BD. ad DA. ita NS. ad SM. similia igitur sunt rectangula BDA. NSM. Rursus cũ æquales sint DA. DE. & MS. SP. ex hypothesi, erit vt ED. ad EA. ita PS. ad PM. & vt BD. ad DA. ita BD. ad DE.

15. 5.

1. definit. 6.

15. 5.

item-

itemque vt NS. ad SM. ita NS. ad SP. quare cum sit vt BD. ad DA. ita NS. ad SM. erit vt BD. ad DE. ita NS. ad SP. sed vt DE. ad EA. ita SP. ad PM. ergo ex æquali vt BE. ad EA. ita NP. ad PM. similia igitur sunt rectangula BEA. NPM. Quare cum ostensum sit esse BD. ad DE. vt NS. ad SP. erit componendo, & per conuersionem rationis vt BE. ad BD. ita NP. ad NS. & permutando vt BE. ad NP. ita BD. ad NS. eruntque duo rectangula similia BEA. NPM. & duo similia BDA. NSM. super quatuor proportionalibus BE. NP. BD. NS. constituta proportionalia: vt igitur rectangulum BEA. ad rectangulũ NPM. ita rectangulum BDA. ad rectangulum NSM. & permutando vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA. ita rectangulum NPM. ad rectangulũ NSM. sed vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA. ita quadratum EI. ad quadratum DH. & vt rectangulum NPM. ad rectangulum NSM. ita quadratũ PX. ad quadratum Sa. vt igitur quadratum EI. ad quadratum DH. ita quadratum PX. ad quadratum Sa. ideoq; vt EI. ad DH. ita PX. ad Sa. atq; eodem modo demonstrabimus esse vt FK. ad EI. & GL. ad FK. & de. ad GL. ita QY. ad PX. & RZ. ad QY. & TV. ad QY. Quare cum in eadem ratione diuisæ sint diametri AG. MR. & parallelæ DH. EI. FK. GL. de. ipsis Sa. PX. QY. RZ. TV. sint proportionales; Analogæ sunt Hyperbolę Aed. MVT. & ex 24. huius habent etiam rationem compositam ex rationibus altitudinum Ad. MT. & parallelarum quarumcumque proportionalium de. TV. Quod erat demonstrandum.

22. 6.

11. 5.
22. 6.

COROLLARIVM.

EX hac & penultima propositione manifestum est, si Hyperbolarum exponentes ordine constituantur 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. *&c. primam Hyperbolam esse parti secundæ circa dimidiam diametrum analogam, eandem parti tertiæ Hyperbolæ*

bolæ circa tertiam partem diametri; & parti quartæ circa quartam partem diametri, atque ita deinceps analogam; cum exponentes illas partes indicent $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$*. &c. Eodem modo secundam Hyperbolam eſſe parti tertiæ circa duas tertias diametri analogam, & eandem parti quartæ Hyperbolæ circa duas quartas, & parti quintæ circa duas quintas diametri, analogam, atque ita deinceps, quod exponentes* $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$*. indicant: ſicque tertiam Hyperbolam eſſe parti quartæ circa 3. quartas diametri, & parti quintæ circa tres ſextas analogam atque ita de reliquis vt apparet ex exponentibus* $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{6}$*. &c.*

Præterea constat ex vltima propoſitione, primam Hyperbolam productam circa diametrum duplicatam ſecundæ Hyperbolæ, circa triplicatam tertiæ, circa quadruplicatam quartæ Hyperbolæ eſſe analogam: quod exponentes $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{4}{1}$*. indicant. Item ſecundam Hyperbolen circa diametrum auctam ſeſquialtera proportione, ita vt diameter ad additam habeat rationem ſeſquialteram, ad ſecundam Hyperbolam, & eandem circa diametrum auctam proportione 4. ad 2. id eſt duplicatam, ad quartam; & eandem circa diametrum auctam proportione 5. ad 2. ad quintam Hyperbolam eſſe analogam; vt oſtendunt exponentes* $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{5}{2}$*. atque ita deinceps in infinitum.*

FINIS LIBRI QVINTI.

CVRVI AC RECTI

Proportio promota.

LIBER SEXTVS.

TRia sunt maxime insignia Ζητέμενα, quæ iam inde a nascentis in Græcia Geometriæ primordijs Mathematicorum ingenia ac laborem exercuerunt, Circuli Tetragonismus: eiusdem in quotlibet partes diuisio; ac inter duas datas rectas, duarum mediarum proportionalium inuentio. Vltimo huic Pythius ipse ex tripode occasionem dedit, cum aram suam pesti auertendæ duplicare iussit, quod abductione quæstionis, seu ἀπαγωγῇ τοῦ ζητήματος ad eam quæ est de duabus medijs proportionalibus fieri posse Hippocrates Chius animaduertit: ideoque quæsitum hoc auspicatiori fato quam reliqua duo, solutionem reperit non mechanicam solum per varia Mesolabia, quæ præstantissimi Philosophi simul, & Geometræ, Plato, Heron, Philo Bizantius, Apollonius, Diocles, Pappus, Sporus, Architas, atque Eratosthenes, excogitarunt, sed etiam Geometricam per duas Parabolas Menæchmi: quod Problema nos ex solidorum grege in nobiliorem planorum ac Geometricorum classem, initio superioris libri, non temere, sed validis rationibus moti transtulimus. Secundum vero quæsitum felicissimos natales, atque exortum habere visum est ex

primo, tertio, & quarto elementorum, cum Circulus cœpit bifariam secari a diametro, hinc trifariam trianguli isopleuri; quadrifariam quadrati: in quinque æquales portiones pentagoni; in sex hexagoni; in quindecim pentedecagoni inscriptione: item cum quilibet arcus bifariam, demonstratione plana; trifariam solida diuisus est; vt tamen idem vniuersale euaderet nulla Geometrarum industria, nullo ingenij conatu perfici potuit, sed veluti sydere quodam afflatum ita repente vigor eius exaruit, vt nullum ne minimum quidem multorum sæculorum decursu cœperit incrementum.

Primi deterior adhuc conditio: nam licet a præstantissimis Geometris iam ab antiquis temporibus omni opera excultum, fieri tamen non potuit, vt vllo Problemate seu Mechanico, seu Geometrico, plano, solido, vel lineari vel primi eius surculi excluderentur. Nihil dum in eo statui, nihil determinari hactenus potuit, sed quæcumque de eo demonstrata sunt quibusdam hypothesibus innituntur, quæ num inter ἠπορημένα *tantum, an etiam inter* ἀδύνατα *recensenda sint, vix quisquam audeat affirmare. Ad hoc vero Problema priscos illos excitauit, vt Proclo visum est, quadragesima quinta elementorum, qua dato rectilineo æquale parallelogrammum constituitur in dato angulo rectilineo; aut, vt ego quidem existimo, vltima secundi, qua dato rectilineo æquale quadratum describitur. Si enim illa fieri poßunt, quæstione quoque dignum est, num rectilineæ figuræ curuileneis æquales ostendi queant. Primi qui lapidem hunc mouerunt circuli aream quam Græci* ἐμβαδὸν *vocant, quadrati, aut rectilineæ figuræ spatio exæquare, ac certa proportione comparare conati sunt: quorum antiquissimus, vt Iosepho Scaligero placet (cui viro tantum in humanioribus fidei conciliat insignis eruditio, quantum in Geometricis detrahit crassissima ignoratio) fuit Bryso, hinc Antipho, quos excepit valentior secutor, non Oenopides Chius, vt perperam ex Proclo deducit Buteo in suo de circuli quadraturis tractatu, sed eiusdem nationis Hippocrates, ex mercatore & naufrago insignis Geometra, ac Philosophus. Priores duos nihil magis notos reddidit quam magni Philosophi iusta repræhensio, qua eorum pseudoterragonismos identidem incessit; Postremus acutissimo epicheremate (o lippum oculis male inunctis Scaligerum, qui hic acumen nullum se videre, & inuentum hoc rem vulgatissimam, ac cuiuis Geometriæ tyroni parabilem asserit,)* μηνίσκους, *seu Lunulas quadrauit, hinc cum veluti concepto semi-*

Proclus in 45. element.

Papp. in 1. Physic.

ne

ne in circuli tetragonismum eniteretur, abortum ψευδάριον *effudit, adeo tamen eleganti, & ad veritatis speciem conformato aspectu, vt vel parenti suo placuerit, cui licet notum esset nothum esse, ac mancum suum partum; qui enim id ignoraret elementorum scriptor doctissimus, &* ἀπαγωγῆς *seu abductionis inuentor acutissimus? pro legitimo atque perfecto venia haud omnino indigna* φιλαυτία, *obtendere conatus est. Horum authorum paralogismos posteris tradiderant, qui non extant, Eudemus in historia, & Ceria Aristotelica, teste Eutocio Ascalonita in Archimedem de dimensione circuli, ex quibus forte desumpserunt qui extant Alexander Aphrodisæus, ac Simplicius & ex ijs Buteo in circuli quadratura, & Blancanus in Aristotelis locis Mathematicis, quos adeat qui volet.*

Cum igitur hæc via τοῦ ἐμβαδοῦ *nullum videretur exitum habere, aliam iniјt Dinostratus eius Menechmi frater qui circa conicas sectiones primus versatus est, ac Eudoxi discipulus fuit, paulo, vt videtur, post tempora Platonis, ac contemplationem a circuli area ad peripheriam transtulit cui æqualem lineam rectam inuestigauit curua quadam per duplicem motum descripta quam* τετραγωνίζουσαν *ipse, Scaliger Quadratariam, Commandinus Quadrantem, Clauius Quadratricem appellat, tunc forte subodoratus, quod postea Archimedes demonstrauit, omnem circulum triangulo rectangulo æqualem esse, cuius quidem vna earum quæ exeunt a centro ad circumferentiam linearum vni ex ijs quæ circa rectum angulum sunt trianguli lateribus, ambitus vero basi æqualis est. Sed ex hoc modulo Problema nullum quod ad rem faceret excudi potuit; Theorema hinc quidem prodijt hypotheticum, quo, si detur vltimum Quadratricis punctum, probatur futurum vt detur circumferentia circuli datæ rectæ æqualis. at vero punctum illud existere nulla ratione posse recte animaduertit Pappus Alexandrinus lib. 4. Collectionum Mathem. Prop. 25. (nescio quo authore idem Sporo tribuerit Scaliger) & nos postea demonstrabimus; quare non certiori fiducia sperandum est ex hac hypothesi circulum quadrari, quam bouem ratiocinari posse ex hac conditionali, quod si bos esset animal rationis particeps ratiocinaretur, cum bouem esse animal rationale, fieri nullo modo possit. Excogitatæ sunt & aliæ* τετραγωνίζουσαι *quas Hippias antiquus Geometra in vnum volumen coniecit, in quarum ordinem etiam* τὴν ἕλικα *seu volutam in plano allegit ingeniosissimus Archimedes, hoc demonstrato,*

Iof. Scalig. Proclus l. 3. p. 3.

quod a Conone propositum fuerat; si lineam spiralem recta linea contigerit in vltimo ipsius spiralis termino, alia autem recta a puncto manente ducatur perpendicularis super lineam circumductam, restitutamque in priorem locum, ita vt cum contingente coëat: erit hæc linea circumferentiæ circuli æqualis; cuius tangentis inueniendæ maior spes affulget, quam vltimi quadratariæ puncti, cum nihil quod huic inuentioni repugnet hactenus appareat. Tandem cum abditissimæ huic recti & circularis analogiæ peruestigandæ impar Geometriæ sagacitas crederetur, placuit Archimedi in consilium adhibere Numeratricem, cuius ope deprehendit cuiuslibet circuli ambitum diametri esse triplum, & adhuc superare parte quapiam quæ quidem minor est septima diametri, maior autem decem septuagesimis primis; satis hæc quidem accommodate, vt recte annotauit Heraclides in Archimedis vita apud Eutocium in Archimedis circuli dimensionem πρὸς τὰς τȣ̃ βίȣ χρείας, *ad humanæ vitæ vsum, excogitata sunt, illarum tamen quantitatum rationem haud exacte, expresserunt. Quare Apollonius Pergæus* ἐν τῷ ὠκυτοβόῳ, *& Philo Gadareus ex antiquis ad exactiores numeros rem adduxerunt, recentiores vero eo continuo circuli* τεμαχίσμῳ *peruenerunt, vt eius perimetrum inter duo polygona 25165824o. angulorum, quorum alterum inscriptum, alterum circumscriptum intelligatur sitque illud partium 62831853071795861. istud 62831853071795863. quarum diameter est 20000000000000000. positum esse demonstrarint, imo audio ad maiores numeros calculum increuisse, operoso quidem sed superuacuo vt reor, ac seruili labore; vt qui neq; ad vsum conferat, neq; acu exactam proportionem attingat: Et qui id possit numerus, vbi forte diameter & peripheria, itemque circuli ac cuiusuis polygoni areæ magnitudines sunt* ἄλογοι, *seu irrationales, quæ Geometricè, non Arithmeticè exponi possunt? Atque hæc antiquiores Geometræ; Neque vero fæliciorem successum recentiorum, qui hoc saxum volutarunt, conatus habuerunt; imo eo peius illis hæc cessit opera, quo illi veteribus & doctrina, & ingenio longius agnoscuntur inferiores. Quid? quod ab illis temporibus neminem paulo melioris notæ Geometram, sed aut triobolarios, aut plærosque omnes matheseos penitus ignaros in hoc argumento versatos deprehendo? Quo enim alio nomine digneris Arabas illos apud Butionem Campanum, Brauardinum, Nicolaum Cusanum, Orontium, Bouillium, Durerum, Fortium, & post hos alio-*

Adrians Romanus idæis Mathem.

rum

rum ignobilem turbam: quibus piget me annumerare Io. Baptistam Portam, virum alioquin raræ, ac multiplicis doctrinæ, qui in suo de elementis curuilineis libro, dum Arcadum more ex lunulis nobilitatem aucupatur, ac Hippocratis incudem tundit, infelix faber sibi notam inussit, ac nulla re, quæ memoriam mereatur, inuenta, vt recte Io. Camillus Gloriosus in exercitationibus Mathematicis ostendit, multo grauiore, quam ille, lapsu a proposito excidit. Neque admodum honoratiore loco reponendum censeo Philippum Landsbergium, qui cum nouæ suæ Cyclometriæ fundamentum iaciat minime Gemetricum, falsum, substructioni haud idoneum, eam tamen veritati, & Gemetriæ Principijs magis consentaneam quam omnium Gemetrarum qui precesserunt aßerere non veretur, ac sibi ipsi gratulatur, totisque manibus applaudit, quod tetragonismum tot sæculis, totque a Geometris summo studio, ac labore quæsitum nunc primum summo Dei beneficio inuenerit. Adeo nobis nostri illudit amor, ac magico veluti fascino mentis oculum inficit, vt proprij partus Thersite licet deformiores, Achille tamen formosiores esse, & πρῶτον εἶδος ἄξιον τυραννίδος habere videantur. Sed horum omnium inscitiam infinito per internallo superauit Iosephus Scaliger bipedum omnium quotquot fuerunt, sunt, & erunt (hoc eum elogio vir quidam doctissimus illustrat) ne Orontio quidem Finæo excepto ἀγεωμετρητότατος, in suis elementis Cyclometricis: quæ cum perlegerem mirum quam varij animum motus affecerint, ira, indignatio, admiratio, risus, commiseratio.

Cyclom. lib. 1. p. 1.

Prif. 1. lib. 1.

Quis æquo animo ferat Philologum Dictatoriam potestatem, eamque impotentissime in doctissimos Philosophos, ac Mathematicos exercere? Quis sustineat Archimedem Lynceum Geometram, ac centimanum machinatorem tanquam aduersus ὀρθαλμείαν, ac χειρεργίαν peccantem traduci, vilissimo cisiario vel aurigæ comparari, inscitiæ, & admißorum in apodixibus ἀτοπημάτων ac ψευδαρίων accusari; affectatæ per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον (quam etiam alibi scopulum vocat Scaliger) in Geometria Tyrannidis insimulari? Quis sine bile vel ipsius furentis Herculis audiat, Dinostratum tanquam nominis falsarium in τετραγωνίζουσῃ infamari? Platonem, Heronem Alexandrinum Mechanicum, Philonem Bizantium, Apollonium Pergæum ostentationis argui; Eratosthenis μηχάνημα ad cubi duplicationem excogitatum, & Nicomedis canonium irrideri? Cui stomachum non faciat vanissimi hominis

In Polegom. Cyclometræ.

In Prolegom. meschalij.

ἀλα-

In dedicatoria Cyclometria.

ἀλαζονεία qua a ſe priſcos omnes vinci iactat, quod omnia, non παραλογιστικῶς, vt illi, ſed κατὰ τὸν ἐπιστημονικὸν λόγον demonſtrarit? Quis non vel Niobeo ſtupore ſtugeat eo ſtuporem hominis perueniſſe, vt aßerat Helicen ſiue volutam ex ſedecim, quadratricem duplicatam ex 8. circulorum peripherijs conſtare. Ambitum dodecagoni circulo inſcribendi plus poße quam circuli perimetrum, Quadratum ab ambitu circuli (qui error fuit Arabum apud Buteonem) decuplum eße quadrati à diametro; Parabolam ad triangulum in eadem baſi, eademque altitudine conſtitutum rationem habere ſeſquitertia minorem, & alia huiuſmodi λῆρα pene infinita, quorum vt quædam Adrianus Romanus, Barleduchius, Cataldus & alij annotarunt, ita vix ſingula numero retulerit, qui ſingula operis verba in cenſum aduocarit? Cui vel rigidiſſimo Heraclito riſum non excutiant non tantum rubricatæ pagellæ, & ad falſitatis fucum potius quam veritatis ornatum purpurißo eleganter interſtinctæ, ſed etiam grandis ille ellipſoidem, volutarum, ſecuricularum, Scalprorum apparatus, ad magnificam quamdam Problematum ſubſtructionem, in qua tandem non nobilis ἀποδείξεων chorus degat, ſed viliſſima ſophiſmatum turba niduletur? Denique quem non miſereat hominis, qui ante ſecunda adeo exiſtimationis aura, tum propria tum paterna eruditione excitata honori atque gloriæ velificatus fuerat, momento in ipſo pene portu naufragium feciße, & partam tot alijs operibus laudem vno opuſculo decoxiſſe. Sic habeant qui vltra ſobrietatem, & crepidam ſapere volunt, & qui mediæ regionis limites egreßi in eam temerario auſu tranſcendere conantur, in qua cum maioris ſplendoris efficaciam non robuſtioribus Philoſophiæ neruis colligatæ ſed fluxa Philologiæ cæratura compactæ ingenij alæ ferre non valeant, ſolutæ tandem impar viribus onus in dedecoris pelagus deponunt, ac Icario lapſu vectoribus ſuis æternum ex ignominia nomen acquirunt.

Scal. Cyclomet. lib. 1. ad lectorem.

Scio quid hominem excuſare poßit, longus ſcilicet, vt ipſemet ait, ac moleſtus morbus non tantum corporis ſed etiam animi, a quo nondum ſeſe receperat cum illa ſcriberet: apparet ita rem habuiſſe, eamque ægritudinem mentis lyenteriam fuiſſe, ex qua tam ſordidæ paralogiſmorum deiectiones, ac foediſſima linguæ calamique proluuies, qua chartam verius, quam, quod maxime volebat, Archimedis, aliorumque præſtantiſſimorum Mathematicorum famam deturpauit. Sed heus tu, inquies, itane in defunctum ſæuis, ac tanquam

Plin.

quam larua cū mortuis luctaris, aut instar nocturni latronis innocuū cadauer expolias? annon times ne te mantum eius vltrix aliquis stylus, vt olim Niconis statua æmulum opprimat? Testor superos me non maleuolentia adductum calamum armasse, quæ enim mihi simultas esse possit cum homine clarissimo, ignoto, mortuo? sed veritatis quæ opprimitur, preclarissimorum virorum quorum fama læditur, denique totius Reipublicæ Mathematicæ, ac tui etiam amore, mi Lector, qui pellaci hominis facundia, tanquam Sirene, in altos errorum scopulos attrahi fortasse posses, ni esset qui inclamaret.

Plato 5. de Rep.

Suidas, & Pausanias.

Heu fuge fallaces terras.

Virg. 2. Æn.

efficeretque vt in tutiorem stationem studiorum cursum auerteres. Immo statueram totum illud opus tamquam Augiæ stabulum singulis erroribus expurgare, sed cum animaduertissem eos sua multitudine vel Herculeum laborem superaturos, cœptis destiti, contentus ad communem vtilitatem eos digito indicasse. Atque hæc non omnino παρέργως; Vt vero ad suam semitam orationis cursus redeat, ex dictis efficio tam circuli in quotlibet partes diuisionem, quam eiusdem tetragonismum inter porima nondum ascitam esse, sed vt Marinus antiquus Geometra annotauit, adhuc inter ἄπορα recensenda. Vtrum vero eadem πορισθὰ sint, ac fieri tandem possit vt aliquo Problemate soluantur si quæras, respondebit Philoponus ἐν ὑςέροις neutrum antiquos Geometras aggressuros fuisse, ni fieri posse iudicassent. Recte; sed quid si eos sua fefellisset opinio? Nos ergo, vt tandem ad institutum nostrum in hoc libro veniamus, ostendemus non tantum ex natura rei possibile, sed etiam per media Geometrica demonstrabile esse vtrumque quæsitum. Hinc Dinostrati quadratricem extra circulum productam ad legitimum tetragonismi vsum non per vltimum eius punctum, sed per tangentem nouo inuento aptabimus: mox lineas ad vtrumque munus obeundum plures delineabimus, pluresque conditiones demonstrabimus, quarum qui vel vnam aliquando ad effectionem Geometrico Problemate deduxerit, is etiam totum hoc negotium effectum dederit. Denique ex huiuscemodi verius linearum figmentis, quam lineis varia Problemata efforemabimus, quæ non leuem etiam in Geometricis vsum sunt habitura.

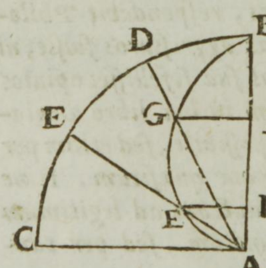
Marinus in data Euclidis.

DEFINITIONES.

I.

SI circa diametrum Quadrantis manens alter radiorum, qui angulum rectum compræhendunt, ita conuertatur, vt punctum à centro per radium, & extremitas per circunferentiam Quadrantis eadem proportione moueantur: deſcribet punctum ex centro lineam curuam, quæ *Spiralis Quadrantis*, dicatur.

Sit quadrans ABC. cuius centrum A. radius AC. rectum angulum cum AB. compræhendens; extremitas in Quadrantem deſinens C. Conuertatur AC. circa A. ac moueatur A. punctum in F. & punctum C. in E. ita vt quæ ratio AF. ad AC. ſeu AE. Eadem ſit CE. ad CB. item vt AG. ad AD. id eſt, AC. ita ſit CD. ad CB. atque ea proportio in toto motu ſeruetur: deſcribet punctum motum ex A. lineam curuam AFGB. quæ vocetur Spiralis Quadrantis. Eſſe autem ſpiralem conſtat ex Archimede ad propoſit. 11. de lineis ſpiralibus, & Pappo Alexandrino ad propoſit. 18. lib. 4. collectionum mathematicarum; eſtque quarta pars (habita ratione temporis, & motus) ſpiralis integra reuolutione deſcriptæ, & radius AC. quarta pars rectæ lineæ quam in prima circulatione punctum pertranſit.



II.

PArs lineæ rectæ inter principium ſpiralis, & lineam ſpiralem, vocetur *Radius Spiralis*: & radius compræhendens vtrumque extremum dicatur *Diameter Spiralis*.

Vt rectæ AF. AG. AB. inter punctum A. quod eſt principium lineæ ſpiralis (ex Archimede ad 11. prop. de lineis ſpiralibus) & lineam ſpiralem AFGB. interceptæ dicantur Radij ſpiralis: & AB. vtrumque extremum connectens, Diameter Spiralis.

III.

PErpendiculares à punctis, vbi ſpiralem eius radij ſecant, in latus Quadrantis erectum, ſeu diametrum ſpiralis ductæ dicantur *Sinus Spiralis*: atque omnium maximus (augentur enim à principio vſque ad maximum, à quo rurſus deficiunt, vt oſtendetur poſtea) dicatur *Sinus Spiralis maximus*.

Vt perpendiculares à punctis F. I. in latus AB. dicantur ſinus ſpirales: & ſi omnium maximus ſit FI. hoc nomine compelletur.

IIII.

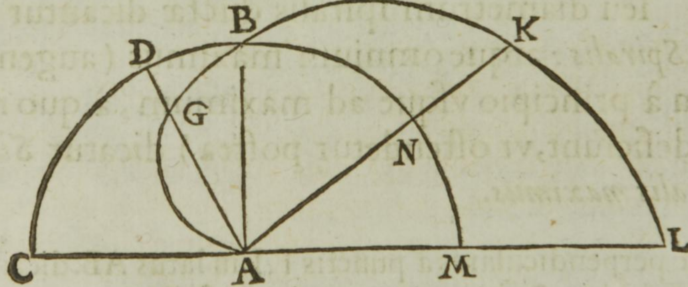
RVrſus quælibet pars ſpiralis dicatur *Spiralis partialis*: & recta eius extrema complectens *Diameter*; habeatque ſuos radios ac ſinus, inſtar ſpiralis quæ deſcribitur in Quadrante.

Vt AFG. est Spiralis partialis, cuius Diameter AG. vnus radiorum AF. Sinus AI.

V.

QVod si supradictus motus continuetur, ita vt extremitas semidiametri arcum semicirculi, punctum vero a centro lineam diametro æqualem similiter percurrat, describetur spiralis semicirculi, quæ erit dimidia pars (habita ratione temporis & motus) piralis integra reuolutione descriptæ.

Vt si extremitas semidiametri moueatur per B. in N. & punctum a centro in K. ita vt sit ea ratio AB. semidia-



metri ad rectam AK. quæ Quadrantis CB. ad arcum CBN. continuabitur spiralis ab A. in K. atque ita deinceps vsque in L.

VI.

NOn aliter in Quadratricibus, Radij dicantur qui a centro circuli, in quo describuntur, ad lineam Quadratricem; sinus qui à punctis vbi radij Quadratricem secant, perpendicula-

diculares ad alterum latus Quadrantis, & ad alterum paralleli ducuntur: quæ omnia ex demonſtrationibus apparebunt.

SCHOLIVM.

Sed audio Pappum Alexandrinum Collect. lib. 4. p. 24. huiuſmodi lineas reprehendentem, quod per ignotam adhuc, atque irrepertam circuli, & rectæ proportionem deſcribantur. Recte id quidem, ſi ea proportio etiam τῶν ἀδυνάτων numero contineretur, neque κατὰ τὴν φύσιν poſſibilis eſſet. At vero res eſt haud inſolens, tum in Phyſicis, tum in Mathematicis, vt ex ijs quæ non ſunt, eſſe tamen poſſunt, quid futurum ſit, fieriue poſſit hypotheticè demonſtretur. Latet adhuc ratio inueniendarum, inter duas datas, duarum mediarum proportionalium, quod tamen inueniri queant, indicant varia Meſolabia a præſtantiſſimis Geometris, apud Eutocium, excogitata. Hinc non abſurde licet argumentari: Si inter duas datas duæ mediæ proportionales reperiantur, erit cubus primæ ad cubum ſecundæ, vt prima ad quartam; at vero impoſſibilis non eſt illa inuentio, igitur poteſt eſſe ratio cubi ad cubum quæ datarum linearum. Quare ſi oſtenderimus poſſe lineam rectam, ac circulum in eaſdem rationes ſecari, non inepte Helicum, & Quadratricum deſcriptionem inſtitutam eſſe probabimus. Si enim fieri poſſit hæc diuiſio, etiam puncta tam in linea recta, quam in circulo mota, modo ſupradicto, partes proportionales auferre poſſunt; ideoque lineam Spiralem, Quadratricem, Diuiſiuam, delineare. Ac proinde, quæ inde efficientur demonſtrationes, non quidem ex datis procedent, ſed ἐκ τῶν πορισθῶν, ex quibus non minus certo quantitatis affectiones, quam ἐκ τῶν δεδομένων comprobabuntur. Quod vero poſſibilis ſit proportionalis hæc diuiſio, ſequentibus duobus Lemmatis oſtendemus.

Poſtulatum.

Lineam curuam extendi poſſe.

LEMMA I.

SI linea curua extendatur, vt extendi amplius non possit; erit linea recta.

Linea recta A. extendatur, ita vt amplius extendi non possit, sitque hoc modo extensa B. Dico B. esse lineam rectam. Si enim B. non sit linea recta, erit curua, at linea curua extendi potest; Igitur B. extendi potest; at supponebatur non amplius posse extendi. Quod est absurdum. Igitur B. est linea recta. Quod erat demonstrandum.

Postulatum huius.

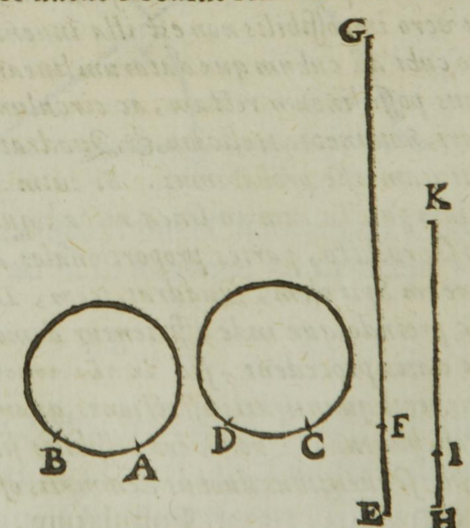


LEMMA II.

POtest data linea recta dati circuli perimetro similiter secari.

Sit data recta HK. & datus circulus AB. Dico rectam HK. posse secari ea proportione, quâ secantur peripheria circuli AB. Sumatur in circulo AB. pars AB. cui in æquali circulo sumatur pars æqualis CD. ac extendatur perimeter circuli CD. quantum potest, migrabit in lineam rectam, quæ sit EG. in qua remaneant eadem diuisionis puncta, quæ erant

Lemm. 1. huius.



in

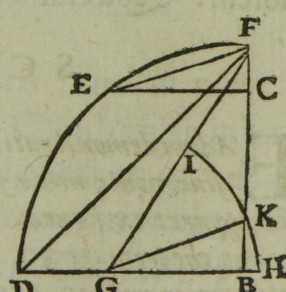
in circulo: videlicet E. F. puncta sint eadem punctis C. D. Hinc data HK. rectæ EG. similiter secetur in I. Quoniam est vt KH. ad HI. ita GE. ad EF. & vt GE. ad EF. ita peripheria tota circuli CD. ad partem CD. (est enim proportio æqualitatis, cum tota EG. sit peripheria ipsa totius circuli extensa, & EF. pars rectæ EG. sit eadem parti CG.) & vt peripheria tota circuli CD. ad partem CD. ita peripheria totius circuli AB. ad partem AB. ergo vt KH. ad HI. ita peripheria circuli AB. ad partem AB. linea igitur data HK. dati circuli AB. perimetro similiter secari potest. Quod erat demonstrandum.

10. 6.

LEMMA III.

Maior est ratio sinus totius ad siuum versum arcus Quadrante minoris, quam peripheriæ Quadrantis ad dictum arcum.

In circulo cuius centrum B. sit peripheria Quadrantis DF. arcus minor Quadrante EF. ductis finibus rectis DB. EC. erunt BF. CF. sinus versi, & BF. etiam sinus totus, qui cum sit maior quam EC. accipiatur in æquali BD. recta BG. æqualis ipsi EC. item cum fit maior quam CF. accipiatur BK. æqualis CF. & connectantur DF. EF. GF. GK. ac centro G. distantia GK. describatur circulus HKI. secans DB. productam in H. & GF. in I. Dico maiorem esse rationem BF. ad FC. quam DF. arcus ad arcum FE. Nam quia in triangulis GBK. ECF. rectangulis ad B. C. æqualia sunt latera GB. BK. lateribus EC. CF. ex hypothesi, erunt anguli BGK. CEF. æquales. Iam vero maior



4. 1.

8. 5. ior est ratio sectoris GHK. ad sectorem GKI. quam eiusdem sectoris GHK. ad triangulum GKF. & sectoris GHK. ad triangulum GKF. maior est ratio, quam trianguli GBK. ad idem triangulum GKF. ergo a primo ad vltimum, maior est ratio sectoris GHK. idest arcus HK. ad sectorem GKI. id est ad arcum KI. quam trianguli GBK. id est rectæ BK. ad triangulum GKF. id est ad rectam KF. & componendo & per conuersionem rationis minor ratio IH. ad HK. id est anguli FGH. ad angulum KGH. quam rectæ FB. ad rectam BK. sed angulus BDF. internus minor est externo FGH. Igitur minor est ratio anguli BDF. ad angulum BGK. id est ad angulum CEF. qui modo ostensus est ei æqualis, quam anguli FGH. ad angulum KGB. id est, CEF. Cum ergo minor sit ratio anguli BDF. ad angulum BGK. id est CEF. quam anguli BGF. ad angulum BGK. id est CEF. & minor ratio anguli BGF. ad BGK. angulum, id est ad CEF. quam FB. ad BK. erit a primo ad vltimum, minor ratio BDF. ad CEF. quam FB. ad BK. id est, quam FB. ad FC. sunt enim positæ æquales BK. & FC. sed vt angulus BDF. ad angulum CEF. ita arcus DF. ad arcum EF. (sunt enim dicti anguli dictorum arcuum, aut potius angulorum arcubus subtensorum dimidij) maior igitur est ratio BF. sinus versi arcus DF. id est, sinus totius ad CF. sinum versum arcus EF. quam arcus maioris DF. nimirum Quadrantis ad arcum EF. Quadrante minorem. Quod erat &c.

[Marginal notes: 33. 6. — 1. 6. — 33. 6. — 16. 1. — 8. 5. — 15. 5. — 20. 3.]

SCHOLIVM.

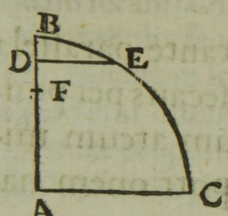
Eadem demonstratio fieri potest, siue HD. sit sinus totus, siue non; modo sit maior quam sinus CE. vt manifeste apparet ex figura. Hoc autem aliter demonstrauimus l. b. primo theoremate 30. Sed præsentem dimonstrationem quia elegantior visa est, addere voluimus.

LEM-

LEMMA IIII.

SI peripheria Quadrantis, eiusque latus erectum, a puncto in quo coëunt similiter diuidantur: perpendicularis a termino arcus proportionalis in latus demissa aufert ex latere, versus eius extremum, partem minorem parte proportionali lateris.

Peripheria Quadrantis BC. cuius centrum A.& latus erectum AB.ex puncto B.vbi coëunt similiter diuidantur, id est, sit BC. ad BE. vt BA. ad BF. & a termino E. arcus proportionalis BE. demissa in latus AB. perpendicularis ED. auferat partem DB. Dico DB. esse minorem quam FB. Nam cum DB. sit sinus versus arcus BE. maior erit ratio sinus totius AB. ad sinum versum DB. quam peripheriæ Quadrantis BC. ad arcum BE. sed vt peripheria Quadrantis BC. ad arcum BE. ita ex hypothesi est AB. ad BF. maior igitur est ratio AB. ad BD. quam AB. ad BF. minor igitur est DB. quam FB. Quod erat demonstrandum.



Lemm. 3. huius.

10. 5.

THEOREMA I. PROPOS. I.

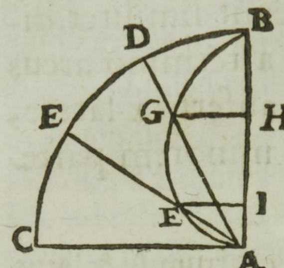
RAdij Spiralis Quadrantis sunt in ratione, in qua sunt arcus Quadrantis inter eosdem radios ad peripheriam productos, & basim eiusdem Quadrantis compræhensi.

Sit Quadrans ABC. cuius Spiralis AFGB. radij Spiralis AF. AG. qui producti secent peripheriam Quadrantis in punctis E. D. Basis Quadrantis AC. latus eiusdem ere-

ctum,

ctum, seu diameter Spiralis AB. Arcus inter basim AC. & puncta E. D. compræhensi sint EC. DC. Dico esse vt AF. ad AG. ita arcum CE. ad arcum CD. Est enim, ex descriptione, seu definitione Spiralis, vt AF. ad AC. ita arcus CE. ad arcum CB. & vt AG. ad AC. ita CD. ad CB. & conuertendo vt AC. ad AG. ita CB. arcus, ad arcum ad arcum CD. ergo ex æqualitate vt AF. ad AG. ita arcus CE. ad arcum CD. Quod demonstrare oportebat.

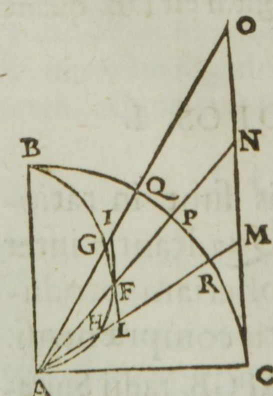
defin. 1. huius.



THEOREMA II. PROPOS. II.

SI diametro Spiralis in Quadrante parallela eandem Spiralem contingat: secans per punctum contactus ducta ad suum arcum minimam inter omnes secantes proportionem habet.

Sit Quadrans ABC. cuius Spiralis AFB. ac Spiralis diameter AB. cui parallela sit recta LI. quæ Spiralem tangat in F. puncto, per quod ex centro A. Quadrantis ducatur AFN. secans arcus CP. occurrens tangenti CN. eiusdem arcus, & parallelæ ipsi AB. in puncto N. Dico secantem AN. ad suum arcum CP. minorem habere proportionem, quam habeat quælibet alia secans ad suum. Ducantur quælibet aliæ secantes vltra citraque AO. AM. quarum illa secet Quadrantem in Q. ista in R. ista rectam LI. quantumlibet productam



ductam in I. ista in L. (secabunt autem, cum ei parallelam CO. secent in M. & O.) illa spiralem in G. ista in L. Quoniam recta LI. spiralem tangit in F. in illo tantum puncto tanget: Cadent igitur puncta I. L. ideoque partes GI. HL. extra spiralem. Cumque in triangulo OAN. parallelæ sint ON. IF. erit vt OA. ad IA. ita NA. ad FA. & permutando, OA. ad NA. vt IA. ad FA. maior autem est ratio IA. ad FA. quam GA. ad FA. Igitur maior est ratio OA. ad NA. quam GA. ad FA. vt vero GA. ad FA. ita arcus QC. ad arcum PC. Igitur OA. ad NA. maior est ratio, quam arcus QC. ad arcum PC. & permutando secantis OA. ad suum arcum QC. maior est ratio, quam secantis NA. ad suum arcum PC. Eodemque modo ostendetur, maiorem esse rationem secantis MA. ad suum arcum MC. quam secantis AN. ad suum PC. Idemque sequetur in qualibet alia secante: ergo secans NA. ad suum arcum PC. minimam inter omnes secantes proportionem habet. Quod erat ostendendum. Vocentur autem puncta F. P. minimæ proportionis in Spirali, & in quadrante: & secans AN. minimæ proportionis.

Proclus in 29. 1. Archim. p. 13. de lineis spiralibus.

2. 6.

8. 5.

13. 5.

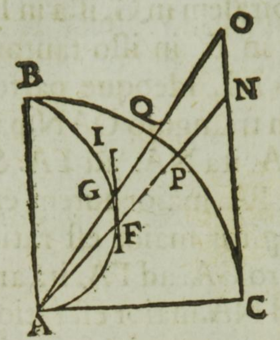
1. huius.

THEOREMA III. PROPOS. III.

SEcans minimam ex cæteris secantibus ad suum arcum proportionem habens spiralem Quadrantis diuidit in puncto, per quod parallela diametro spiralis, seu tangenti Quadrantis ducta dictam spiralem contingit.

Sit Quadrans ABC. in quo secans AN. occurrens tangenti Quadrantis CO. in puncto N. secans Quadrantem in P. Spiralem Quadrantis in F. habeat ad suum arcum PC. minimam ex cæteris secantibus rationem: ac per punctum F. ducatur FGI. parallela tangenti CO. Dico quod

recta FGI. spiralem tangit in F. Si enim non contingit, secet in punctis F. G. ita vt FGI. sit vna recta ipsi CO. parallela, & ducatur per punctum G. secans AO. occurens tangenti in O. & Quadranti in Q. Quoniam parallela ponitur FGI. ipsi CO. erit vt OA. ad AG. ita NA. ad AF. & permutando vt OA. ad NA. ita AG. ad AF. sed vt AG. ad AF. ita arcus QC. ad arcum PC. ergo vt OA. ad NA. ita arcus QC. ad arcum PC. & permutando, æqualis erit proportio OA. ad suum arcum QC. proportioni NA. ad suum arcum PC. Quod est absurdum, cum proportio NA. ad arcum PC. ponatur minima qualibet proportione alterius secantis ad suum arcum. Igitur secans minimam ex cæteris &c. Quod erat probandum.



2. 6.

1. huius.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

Tangens complementi arcus, ad quem eiusdem secans minimam habet rationem, est æqualis arcui.

Sit Quadrans ABC. cuius tangens CN. secans AN. arcus CM. minimam cum eo proportionem habens, ac secans spiralem Quadrantis ADB. in puncto D. sitque arcus CM. complementum arcus MB. cuius tangens BL. Dico tangentem BL. esse æqualem arcui MC. Centro A. per punctum D. describatur Quadrans KDH. & per idem punctum D. ducatur infinita



finita

finita DF. parallela tangenti CN. atque ex puncto A. ad DA. ducatur perpendicularis AF. quæ occurret ipsi DF. in F. Denique ducatur DE. perpendicularis ad DA. ideoque tangens arcus DH. Constat rectam AF. esse æqualem arcui DK. Rursus quoniam in Quadrilatero AEDF. anguli EDA. DAF. sunt recti, parallelæ sunt DE. FA. Sed & parallelæ sunt DF. EA. vtraque enim ponitur parallela ipsi CN. Igitur parallelogrammum est AEDF. & opposita latera AF. DE. æqualia. Quare cum AF. sit æqualis arcui DK. erit DE. etiam æqualis arcui DK. Vt autem arcus KD. ad Quadrantem KH. ita arcus CM. ad Quadrantem CB. & permutando, vt arcus KD. ad arcum CM. ita Quadrans KH. ad Quadrantem CB. & vt Quadrans KH. ad Quadrantem CB. ita semidiameter AD. ad semidiametrum AM. & vt AD. ad AM. ita DE. ad BL. (nam cum æquiangula sint triangula EDA. LBA. ob communem angulum ad A. & rectos ad D. B. erit vt AD. ad DE. ita AB. ad BL. & permutando) erit a primo ad vltimum, vt arcus KD. ad arcum CM. ita DE. ad BL. & permutando, vt arcus KD. ad rectam DE. ita arcus CM. ad rectam BL. est autem probatus arcus KD. æqualis rectæ DE. igitur arcus CM. æqualis est tangenti complementi BL. Quod erat demonstrandum.

19. Spiral. Archimed.
20. Spiral. Archimed.
27. 1.
30. 1.
35. definit.
34. 1.
Schol. 33. 6.
Pappus l. 8. p. 22. & p. 15. 5. elem.
32. 1.
4. 6.

SCHOLIVM.

Hinc manifestum est, si problemate aliquo Geometrico secans minimæ proportionis reperiatur, sequi tangentem complementi arcus, cuius est secans, esse æqualem illi arcui.

THEOREMA V. PROPOS. V.

Tangens complementi arcus, ad quem eiusdem secans minimam habet rationem,

est æqualis Quadranti circuli à principio lineæ spiralis, per punctum vbi secans minimæ proportionis spiralem secat, descripti.

Sint omnia quæ superiori propositione. Dico tangentem BL. esse æqualem Quadranti KH. Quoniam triangula ADE. ABL. communem habent angulum ad A. & rectos ADE. ABL. sunt æquiangula. Igitur vt AD. ad AM. ita DE. ad BL. Sed vt AD. ad AM. id est, ad AB. ita arcus CM. ad Quadrantem CB. id est arcus KD. ad Quadrantem KH. Igitur vt recta DE. ad BL. ita arcus KD. id est, recta DE. illi æqualis, ad quadrantem KH. æquales igitur sunt BL. recta tangens arcus BM. & Quadrans KH. Quod erat demonstrandum.

32. 1. 4. 6. — 1. huius. — Schol. 33. 6. — 4. huius. — 9. 5.

COROLLARIVM I.

Hinc deducitur arcum CM. esse æqualē Quadranti KH. est enim arcus CM. æqualis tangenti BL. quæ modo probata est æqualis Quadranti KH.

4. huius.

COROLLARIVM. II.

Sequitur præterea ex dictis, tam Quadrantem KH. quam arcum CM. esse medio loco proportionalem inter arcum DK. & Quadrantem ABC. nam vt KD. ad KH. ita ostensum est esse DA. ad AM. & vt DA. ad AM. ita Quadrans KH. ad Quadrantem BC. ergo vt arcus KD. ad quadrantem KH. ita Quadrans KH. id est arcus CM. ad Quadrantem BC.

Pappus lib. 8. p. 22. & 15. 5. element. Corol. 1. 5. huius.

COROLLARIVM III.

Denique patet arcum DH. esse minorem arcu DK. id est arcum MB. arcu CM. Nam arcus KD. est æqualis rectæ tangenti DE. at tangens DE maior est quam arcus DH. igitur arcus DH. est minor arcu DK.

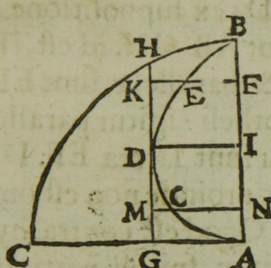
Archimed. 1 de sphæra & Cylindro.

THEO-

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI diametro ſpiralis tam intra Quadrantem deſcriptæ, quam partialis, parallela ducatur tangens ipſam ſpiralem; & à puncto contactus ſinus ſpiricus ducatur: is erit omnium ſinuum ſpiricorum maximus.

Diametro ſpiralis AB. intra Quadrantem ABC. deſcriptæ, ducatur recta HG. parallela tangens ſpiralem in D. & ex D. ducatur DI. ſinus ſpiricus. Dico DI. eſſe omnium ſinum ſpiricorum maximum. Ducantur enim quilibet alij ſinus FE. NO. ſupra infraue ſinum DI ſecantes Spiralem in E. & O. & tangentem GDH. in K. M. Cum recta HDG. ex hypotheſi tangat ſpiralem in D. in illo ſolo puncto tanget. Cadet igitur tota GH. extra ſpiralem. Quare punctum K. erit extra ſpiralem: eſt autem punctum E. in linea ſpirali, maior igitur eſt FK. quam FE. totum quam pars; Quoniam autem ex deſcriptione parallelæ ſunt DK. IF. itẽ KF. & DI. parallelogrammum eſt DIFK. æquales igitur ſunt KF. DI. ſed KF. maior eſt oſtenſa quam EF. igitur DI. maior eſt quam EF. Eodemque prorſus modo oſtendetur DI. maior quam NO. & quam quilibet alius ſinus ſpiricus. Atq; eadem omnino demonſtratio ſuccedet, ſi ABD. ponatur quælibet pars ſpiralis, vt euidentiſſimum eſt. Igitur ſi diametro ſpiralis &c. Quod erat demonſtrandum.



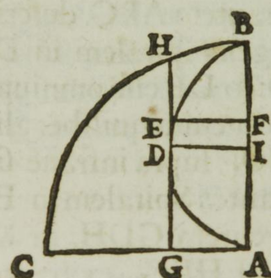
13, p. de ſpiralibus Archimedis.

35. defin.
34. 1.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Recta perpendicularis ad ſinum maximum, a puncto vbi is ſpiralem Quadrantis, aut partialem ſecat, eandem ſpiralem contingit.

Sit Quadrans ABC. Spiralis Quadrantis ADB. quam ſecet DI. ſinus maximus in D. a quo ad ipſam DI ducatur perpendicularis GDH. Dico quod recta GDH. lineam ſpiralem tangit in D. ſi enim non ita ſit, ſecet eam, ac tranſeat per puncta D. E. & ducatur EF. ipſi DI. parallela, ſecans AB. in F. Cum recti ſunt anguli ad I. ex definitione, & D. ex ſuppoſitione, parallelæ ſunt AB GH. id eſt, IF. & DE. ſed & parallelæ ſunt EF. DI. ex hypotheſi; igitur parallelogrammum eſt EFID. æqualia igitur ſunt latera EF. DI. non eſt igitur DI. maior quam EF. ac proinde non eſt omnium ſinuum ſpiricorum maximus: Quod eſt contra hypotheſin. Idem manifeſte contingit in ſpirali partiali. Igitur perpendicularis &c. Quod erat demonſtrandum.



defin. 3. huius.

28. 1.

35. defin.

34. 1.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

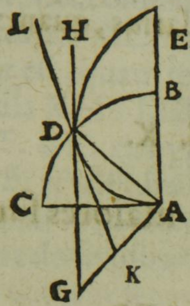
Spiralem in eodem puncto duæ rectæ non contingunt.

Sit linea ſpiralis ADE. in qualibet circulatione deſcripta, & contingat ipſam recta HDG. in puncto D. iungaturque AD. ad principium ſpiralis; & centro quidem A. interuallo AD. circulus deſcribatur CDB. qui ſecet principium circulationis AC. in C. & ducatur AK. ipſi AD. perpendicularis quæ coibit cum contingente HDG. in G.

18. 19. 20. de lineis ſpiralibus Archimedis.

Dico

Dico non posse duci aliam contingentem præter HDG. quæ spiralem tangat in D. si enim potest, ducatur, & sit LDK. quæ coibit cum AK. non in puncto G. alias duæ rectæ HDG.LDK. spatium compræhenderent, sit in puncto K. quod, vel cadat inter G. & A. puncta, vel vltra, ita vt AK. sit vel totum respectu ipsius AG. vel pars. Constat ex ijs quæ demonstrauit Archimedes propositionib. 18. 19. 20. de lineis spiralibus, cum contingentes sint vtraque HDG. LDK. tam rectam AG. quam rectam AK. esse æqualem arcui CD. æquales igitur sunt AG. AK. pars & totum, Quod est absurdum, Non ergo tangent rectæ HG. LK. Spiralem in eodem puncto D. Quod erat probandum.



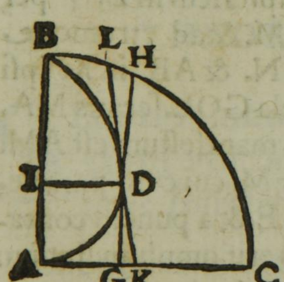
14. pron.

1. pron.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI in puncto in quo sinus spiricus omnium maximus spiralem Quadrantis, aut partialem secat, recta eandem spiralem tangat: ea erit dicto sinui perpendicularis.

In puncto D. in quo Sinus spiricus DI. omnium maximus spiralem Quadrantis ADB. secat, recta HDG. Eandem spiralem tangat. Dico rectam HDG. esse ipsi DI. perpendicularem. Si enim res non ita habeat, sit alia quæpiam LDK. ipsi DI. perpendicularis. Quoniam spiralem ADB. secat sinus spiricus omnium maximus DI. & à puncto sectionis D. ipsi sinui DI. perpendicularis ponitur KDL. ea



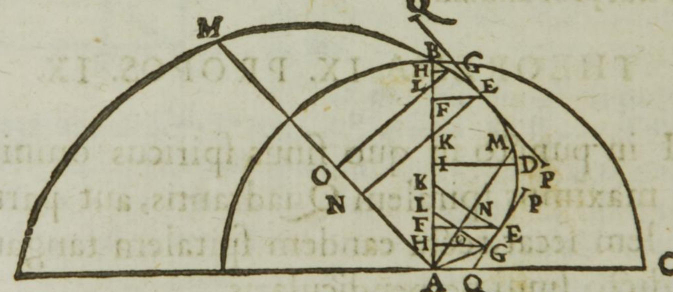
spi-

7. huius. ſpiralem tanget in D. ſed etiam ſpiralem tangit in D. recta GDH. Igitur ſpiralem in eodem puncto tangunt duæ
8. huius. rectæ HDG. LDH. Quod eſt abſurdum. Nec aliter procedit demonſtratio, in ſpirali partiali quod clarius, quam vt ſuperflua repetitione indigeat.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SInus ſpirici maximo propriores maiores ſunt remotioribus.

Sit Spiralis Quadrantis, aut partialis ADB. cuius ſinus ſpiralis maximus DI. & conſtituantur primo inter maximum, & principium lineæ ſpiralis A. duo ſinus EF. GH. ille vicinior maximo, hic remotior. Dico ſinum EF. eſſe



maiorem ſinu GH. Tangat recta PQ. ſpiralem in E. (per datum poſſibile) cui parallela ſit AM. & ad vtrumque perpendicularis EN. ſecans MA. in N. & AB. in K. ipſi
29. 1. vero EK. ex puncto G. ducatur parallela GOL. ſecans MA. in O. perpendiculariter, & AB in L. manifeſtum eſt AM.
4. defin. huius. eſſe dimetientem ſpiralis partialis AEM. cui cum parallela ducta ſit PEQ. tangens ſpiralem in E. & a puncto conta-
defin. 3. & 4. huius. 6. huius. ctus E. ductus ſit ſinus ſpiricus EN. is erit omnium ſinuum ſpiricorum qui in ſpirali partiali AEM. duci poſſunt maximus. Quare maior eſt quam ſinus ſpiricus GO. eiuſdem

par-

partialis spiræ, sed & maior est NK. quam OL. (Nam cum æquiangula sint triangula ANK. AOL. ob rectos ad O.N.& communem ad A. erit vt AN. maior ad AO. minorem ita NK. maior ad OL. minorem) tota igitur EK. maior est, quam tota GL. Rursus cum æquiangula sint triangula KEF. LGH. (nam parallelæ sunt EK. GL. item EF. GK. ex hypothesi, & anguli ad F. H. recti) erit vt KE. ad EF. ita LG. ad GH. maior autem ostensa est KE. quam LG. maior etiam est EF. quam GH. Quod primo erat demonstrandum.

32. 1.
4.6.& 14. 5.
4. 6.
14. 5.

Cadant secundo duo sinus spirici supra sinum spiricum maximum DI.& fiant reliqua, vt in prima parte huius propositionis. Eodem prorsus modo probatur AM. esse dimetientem. EN. omnium sinuum spiricorum partis AEM. maximum; ideo maiorem quam GO. Iam vero (in quo differt prima pars à secunda) minor est KN. quam LO. (Nam cum triangula AOL. ANK. ob parallelas LO. KN. habeant angulos ad N. O. item ad K. L. item ad A. æquales, sunt æquiangula ideoque vt AO. ad OL. ita AN. ad NK. & maior est AO. quam AN. ideoque & maior OL. quam NK.) si igitur ex maiori EN. detrahatur minor KN. & ex minori GO. maior LO. remanebit EK. maior quam GL. Hinc eodem modo, quo in prima parta probabitur EF. maior quam GH. Quod erat secundo loco demonstrandum.

32. 1.
4. 6.
14. 5.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

Secans minimæ proportionis transit per punctum vbi sinus spiralis Quadrantis maximus spiralem secat.

Hoc euidenter deducitur ex superioribus propositionibus. Nam parallela tangenti Quadrantis, aut diametro Spiralis quadrantis, ipsam Spiralem tangit in vno tantum

13. de linea spiralibus. Archim.

 punctо:

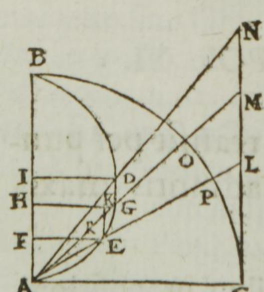
3. huius. puncto: at vero per illud punctum transit secans minimam ex cæteris secantibus ad suum arcum proportionem habens, & in eodem puncto sinus spiricus omnium in Quadrante maximus spiralem secat: Igitur secans minimæ 6. huius. proportionis transit per punctum vbi sinus spiricus Quadrantis maximus spiralem secat. Quod erat &c.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI duæ secantes, vtraque aut vltra aut citra secantem minimæ proportionis ducantur: remotior ad suum arcum maiorem habet rationem, quam propinquior.

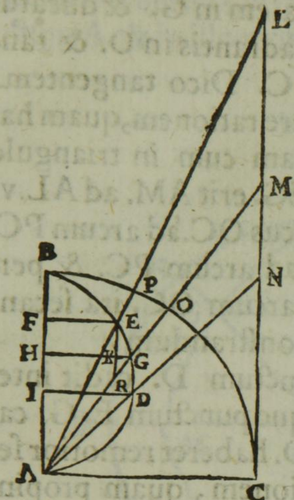
In Quadrante ABC. sit secans minimæ proportionis AN. occurrens tangenti CN. in N. & ducantur duæ aliæ secantes AM. propinquior, AL. remotior, vtraque citra secantē AN. quæ secent Quadrantem in punctis O. P. Dico secantem AL. ad suum arcum PC. maiorem habere rationem quam secantem AM. ad arcum OC. Describatur intra Quadrantem Spiralis ADB. in qua sinus spiricus 11. huius. omnium maximus DI. secans spiralem in D. transibit secans AN. per punctum D. Igitur secantes AM. AL. spiralem secabunt citra punctum D. vt in punctis G.E. per quæ ducantur sinus

10. huius.



spirici GH. EF. erit GH. sinus spiricus maximo DI. vicinior, maior quam EF. remotior. Quare ducta EK. ad FE. perpendicularis, aut ipsi AB. seu CN. parallela ipsam HG. secabit in K. inter puncta G. & H. ideoque ipsam GA. inter puncta G. A. videlicet in R. maiorque erit AG. totum quam pars AR. Iam vero cum in triangulo

MAL.



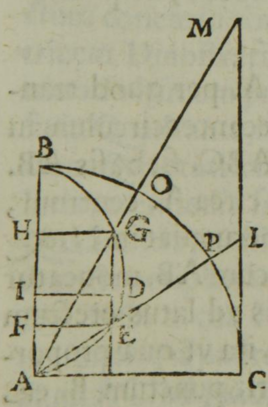
MAL. basi ML. ducta sit parallela ER. erit vt AL. ad AM. ita AE. ad AR. maior autem est ratio AE. ad AR. quam AE. ad AG. igitur maior est ratio AL. ad AM. quam AE. ad AG. sed vt AE. ad AG. ita arcus CP. ad arcum CO. Igitur maior est ratio AL. ad AM. quam arcus CP. ad arcum CO. & permutando, maior ratio secantis AL. ad suum arcum CP. quam secantis AM. ad arcum CO. Quod primo demonstrandum erat.

2. & 4. 6.
8. 5.
13. 5.
1. huius.

Idem omnino sequitur, si vtraque secans cadat supra AN. vt manifeste patet ex figura. Quare si duæ secantes &c. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

Data secante, quæ non sit minimæ proportionis, potest duci alia secans quæ eandem habeat rationem ad suum arcum, quam data ad suum.



In Quadrante ABC. sit secans data AEL. occurrens tangenti CL. in L. quæ non sit minimæ rationis, cuius arcus PC. Dico posse in Quadrante duci aliam secantem quæ eandem ad suum arcum rationem habeat, quam secans AL. ad arcum PC. Sit in Quadrante descripta spiralis ADB. in qua sinus maximus DI. cui parallelus ducatur sinus spiricus EF. & ex E. ad FE. perpendicularis, aut ipsis

AB. CM. parallela EG. secans spiralem in G. & ducatur AG. recta occurrens peripheriæ Quadrantis in O. & tangenti in M. erit CM. secans arcus OC. Dico tangentem AM. ad suum arcum OC. eam habere rationem, quam habet secans AL. ad arcum PC. Nam cum in triangulo MAL. basi ML. parallela ducta sit EG. erit AM. ad AL. vt AG. ad AE. sed vt AG. ad AE. ita arcus OC. ad arcum PC. ergo vt AM. ad AL. ita arcus OC. ad arcum PC. & permutando, vt secans AM. ad suum arcum OC. ita secans AL. ad arcum PC. Quod erat demonstrandum.

2. & 4. 6.
1. huius.

Manifestum autem est quod punctum D. cadit inter puncta G. & E. alias enim si vtrumque punctum E. G. caderet aut citra, aut vltra punctum D. haberet remotior secans ad suum arcum maiorem rationem, quam propinquior; quod est absurdum, cum ostensa sit vtraque eandem habere rationem. Quod etiam inde constat, quia sinus spiricus FE. minor est quam DI. ex 6. huius, quare perpendicularis EG. secabit ipsam DI. in K. inter puncta D. I. quare producta secabit spiralem in G. supra DI.

6. huius.

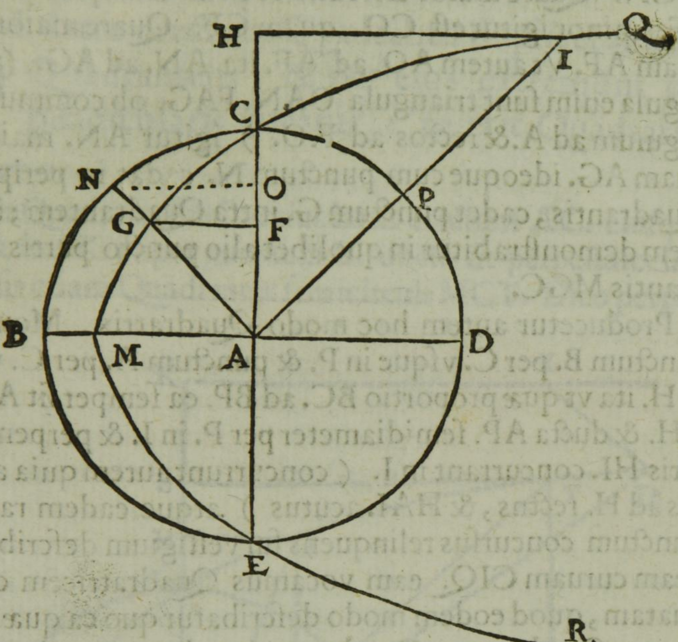
PROBLEMA I. PROPOS. XIV.

Quadratricem in Quadrante describere, & extra Quadrantem producere, atque toti circulo accommodare.

Sit circulus BCDE. cuius centrum A. per quod transeant duæ perpendiculares BD. CE. secantes circulum in quatuor Quadrantes, in quorum vno ABC. sit basis AB. & latus erectum AC. Conuertatur AB. circa A. centrum, tanquam verticem, ita vt punctum B. perueniat in N. & eodem tempore linea recta coincidens cum AB. moueatur ex A. in F. in toto motu perpendicularis ad latus erectum AC. aut parallela basi Quadrantis AB. ita vt quæ proportio est CB. ad BN. arcum quem percurrit punctum B. ea

sit

ſit lateris erecti CA. ad partem AF. quam percurrit punctum A. & in illo motu concurrant duæ rectæ AN. & per-



pendicularis FG. in puncto G. (concurrent autem cum angulus GFA. ſit rectus & GAF. acutus) deſcribet punctum concurſus lineam curuam MGC. quam eſſe Quadratricem Dinoſtrati conſtat ex Pappo lib. 4. prop. 15. & Clauio ad vltimam propoſit. 6. element. Quod vero ea tota ſit in Quadrante, ita demonſtrabimus. Sit quodlibet punctum Quadratricis modo deſcriptæ G. a quo perpendicularis intermedia ſecet latus erectum AC. in F. & diameter Quadrantis per illud idem punctum G. ducta ſecet Quadrantis peripheriam in N. puncto, a quo ducatur ſinus rectus NO. arcus NC. Quoniam, ex deſcriptione, eſt vt peripheria Quadrantis BC. ad arcum BN. ita latus erectum AC. ad partem AE. erit per conuerſionem rationis,

13. pron.

vt

vt BC. ad CN. ita AC. ad CF. Cum vero CO. sit sinus versus arcus NC. maior erit ratio AC. ad CO. quam BC. ad CN. Quare maior erit ratio AC. ad CO. quam AC. ad CF. minor igitur est CO. quam CF. Quare maior AO. quam AF. Vt autem AO. ad AF. ita AN. ad AG. (æquiangula enim sunt triangula OAN. FAG. ob communem angulum ad A. & rectos ad F. O.) igitur AN. maior est quam AG. ideoque cum punctum N. cadat in peripheriã Quadrantis, cadet punctum G. intra Quadrantem; atque idem demonstrabitur in quolibet alio puncto partis Quadrantis MGC.

Lemm. 3. huius.
5. pron.
4. 6.
34. 1.

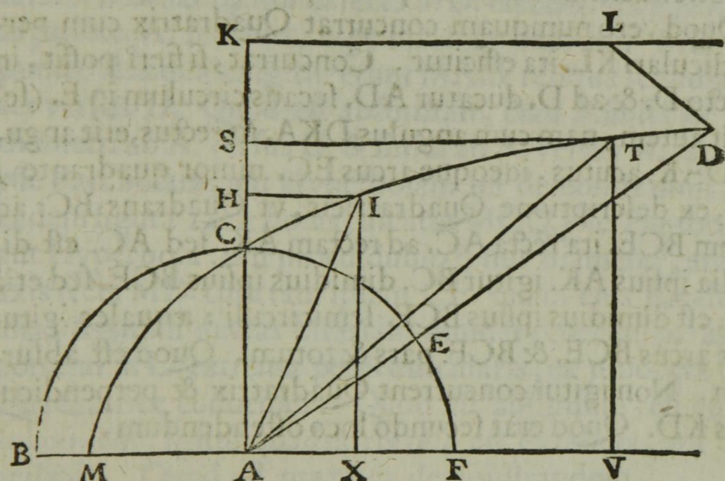
Producetur autem hoc modo Quadratrix. Moueatur punctum B. per C. vsque in P. & punctum A. per C. vsque in H. ita vt quæ proportio BC. ad BP. ea semper sit AC. ad AH. & ducta AP. semidiameter per P. in I. & perpendicularis HI. concurrant in I. (concurrunt autem quia angulus ad H. rectus, & HAI. acutus) atque eadem ratione punctum concursus relinquens sui vestigium describat lineam curuam CIQ. eam vocamus Quadratricem continuatam, quod eodem modo describatur quo ea quæ continetur Quadrante. Quod vero ea cadat extra circulum patet, sumatur enim quodlibet punctum I. Quoniam maior est AI. subtendens angulum rectum ad H. quam AH. & maior AH. quam AC. totum parte, & AC. æqualis ipsi AP. maior erit AI. quam AP. sed punctum P. cadet in peripheriam circuli, ergo punctum I. cadet extra. Idemque ostendetur in quolibet alio puncto Quadratricis productæ; eritque tota Quadratrix MCIQ. Quadratrix semicirculi BCD. Quod si in inferiori semicirculo alia describatur NER. eo modo quo in superiori existet totius circuli Quadratrix REMCQ. Quod faciendum fuit.

19. 1.
defin. 15.

THEOREMA XIV. PROPOS. XV.

SI latus erectum Quadrantis duplicetur extra Quadrantem, & per eius extremum perpendicularis ducatur: ea erit Quadtatrici Ἀσύμπτωτος.

Sit Quadrans ABC. cuius latus erectum AC. eiusque duplum AK. ac per punctum K. ducta sit perpendicularis KL. sit etiam Quadratrix semicirculi MCT. Dico perpen-



dicularem HL. esse Quadratrici Ἀσύμπτωτον. Asymptoton autem vocamus similitudine eius quæ ducitur in Hyperbola, apud Apollonium li 2. con. prop. 1. quæ videlicet quo magis producitur, magis ad Hyperbolam accedit, nec tamen vnquam cum ea concurrit. Primum igitur quod Quadratrix quo vlterius producitur, eo propius ad rectam KL. accedat, ita demonstratur. Producatur basis Quadrantis BA. quantum libet in F. ac perficiatur semicirculus BCF. & ex quolibet puncto I. Quadratricis in basim productam

ductã demittatur perpẽdicularis IX. & ducatur AI. itemq; perpendicularis IH. hinc producatur Quadratrix ex I. in T. etiam mouebitur punctum concursus I. in T. & AI. promouebitur in AT. & ducta TS. ad AK. perpendiculari, ascendet HI. in ST. vt constat ex descriptione Quadratricis. Ducatur TV. ad latus Quadrantis productum perpendicularis. Constat HAXI. & SAVT. esse parallelogramma, quorum aduersa larera æqualia sunt. Igitur æqualia sunt SA. TV. Item HA. XI. maior autem est SA. quam HA. maior igitur etiam est TV. quam IX. Igitur propius accedit punctum T. ad rectam KL. quam punctum I. Quod in alijs quoque ostendentur: Id autem primo probandum erat.

34. 1.

Quod vero numquam concurrat Quadratrix cum perpendiculari KL. ita efficitur. Concurrat, si fieri possit, in puncto D. & ad D. ducatur AD. secans circulum in E. (secabit autem, nam cum angulus DKA. sit rectus, erit angulus DAK. acutus, ideoque arcus EC. minor quadrante) erit, ex descriptione Quadratricis, vt Quadrans BC. ad arcum BCE. ita recta AC. ad rectam AK. sed AC. est dimidia ipsius AK. igitur BC. dimidius ipsius BCE. sed etiã BC. est dimidius ipsius BCF. semicirculi: æquales igitur sunt arcus BCE. & BCF. pars & totum. Quod est absurdum. Non igitur concurrent Quadratrix & perpendicularis KD. Quod erat secundo loco ostendendum.

32. 1.

7. pron.

COROLLARIVM.

Ex duabus superioribus propositionibus constat Quadratricem principio, ac fine carere. Nam ideo primum punctum non habet, quod basis Quadrantis & prima perpendicularis in vnam lineam coincident, quæ sectionem efficere non possunt; vltimo ideo caret, quod duæ, basis Quadrantis, & vltima perpendicularis sint parallelæ, ideoque ad concursum vltimi puncti conuenire non possunt. Rursus manifestum est versus finem Quadratricem in infinitum produci, non versus initium.

THEO-

THEOREMA XV. PROPOS. XVI.

QVadratrix non est figura rectilinea, non Circulus, non Coni sectio.

Quod Quadratrix non sit figura rectilinea, apertius est quam vt probari debeat. Sed quod neque Circulus, aut Ellipsis ita probatur. Sit enim, si fieri potest, horum alteruter; erit in figura 14. æ huius, MD. producta eius diameter; cum tam CE. quam ipsius CE. parallelas bifariam diuidat: igitur in recta MD. est centrum figuræ; sit in puncto A. secabitur ergo bifariam diameter MD. in puncto A. æquales igitur erunt MA. & reliqua semidiameter versus D. Quod est absurdum, cum infinita sit pars diametri ab A. versus D. & finita ab A. versus M. At non esse Parabolam, aut Hyperbolam ita demonstramus. In eadem figura 14. æ huius, dicatur MCQ. esse Parabola, aut Hyperbola, erit proculdubio ipsius diameter, atque axis recta MD. cum tam ipsam CE. quam eius parallelas intra figuram ductas bifariam diuidat; cui cum parallela ponatur KL. extrema perpendicularis, ea producta cum Quadratrice conueniet. Quod est absurdum; est enim ἀσύμπτωτος. Igitur quadratrix non est Parabola, aut Hyperbola. Quod est præterea demonstrandum.

28. 2. Conic.

30. 1. Conic. & 15. defin. elem. Corol. 15. huius.

28. 2. Conic.

26. 1. Conic. 15. huius.

SCHOLIVM.

EX ijs quæ hac propositione demonstrata sunt colligi videtur, Quadratricem nullum alium habere essendi modum, præter eum quem illi tribuit motus puncti, in quo sese diameter Quadrantis & perpendicularis ad latus erectum Quadrantis intersecant: neque vllum punctum in ea linea reperiri, quod concursus ille non efficiat. Quare basim Quadratricis inter ἀδύνατα *recensendam, cum dicatur esse pars*

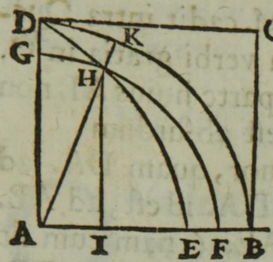
basis Quadrantis inter centrum Quadrantis, & punctum Quadratricis in dicta basi, intercepta. Nam punctum Quadratricis in basi neque est, cum ibi sese basis Quadrantis, & prima perpendicularis non secent, sed concurrant; neque esse potest, cum alio modo quam motu intersectionis lineæ Quadratrix non procreetur. Quomodo ergo veteres, referente Pappo Collectionum lib. 4. p. 16. & ab illo, Clauio in comment. in 6. elementorum prop. 4. de Quadratrice, demonstrant basim Quadratricis, quæ reuera nec est, nec esse potest, esse tertio loco proportionalem ad peripheriam Quadrantis, & eius diametrum? Vereor admodum ne illud Theorema aliter proponendum sit, hoc nempe modo, in quo nihil erit quod reprahendi posset.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVII.

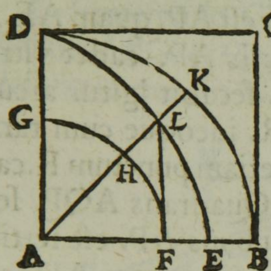
SI ex centro Quadrantis, in quo descripta est Quadratrix, alius Quadrans describatur intra Quadrantem, qui aut ipse, aut eius tangens Quadratricem secet: non erit eius basis arcui Quadrantis, eiusque semidiametro tertio loco proportionalis: si vero neque ipse, neque eius tangens Quadratricem secet, erit eius basis arcui Quadrantis, & semidiametro tertio loco proportionalis.

Sit Quadrans ABD. cuius cenrrum A. basis AB. latus erectum AD. Quadratrix DF. centro A. alius Quadrans AGF. describatur, cuius basis AF. qui Quadrantem ABD. aut secet sua peripheria in H. aut sua tangente FL. in L. Dico non esse vt DB. ad DA. ita DA. ad AF. Ducatur enim in prima figura perpendicularis HI. in secunda tangens FL. ac dicatur esse vt DB. ad DA. ita DA. ad AF. sequetur in

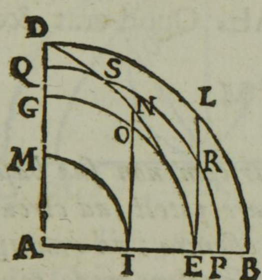
prima



prima ſubtenſam HI. eſſe æqualem arcui HF. in ſecunda tangentem FL. eſſe æqualem arcui HF. quorum vtrumque eſt abſurdum; Quod quidem quia tum a Pappo lib. 4. prop. 16. tum a Clauio fuſius prop. 4. de Quadratrice demonſtratur, eo lectorem remittimus.



Secundam partem propoſitionis ita probamus nos ex prima. Sit Quadrans ADB. cuius centrum A. baſis AB. latus erectum AD. Quadratrix DE. & Quadrans AGE. cuius baſi AE. qui neque ipſe neque eius tangens EL. ſecet Quadratricem. Manifeſtum eſt eum ita ſe habere, ad ipſam Quadratricem, vt ipſe totus intra Quadratricem, eius vero tangens tota extra Quadratricem cadat: alias enim aut ipſe, aut eius tangens arcum BD. ſecaret, ideoque ex prima parte huius, non eſſet tertio loco proportionalis. Dico eſſe vt DB. ad AD. ita AD. ad AE. Si enim non ſit eadem ratio DB. ad AD. quæ AD. ſcilicet AB. ad AE. erit vel maior vel minor: ſit primo maior; fiatque eadem, ac ſit vt DB. ad DA. ita AB. ad AI. erit AI. minor quam AE. (nam cum ſit vt DB. ad DA. id eſt ad AB. ita AB. ad AI. & maior ſit ratio DB. ad DA. quam AB. ad AE. ex hypotheſi, maior erit ratio AB. ad AI. quam AB. ad AE. ideoque minor eſt AI. quam AE.) ergo deſcriptus Quadrans AMI. cadit intra Quadrantem AGE. ſed Quadrans AGE. cadit intra Quadratricem DE. igitur



& Quadrans AMI. eiusque tangens IM. cadit intra Quadratricem, secatque suum quadrantem verbi gratia in O. & Quadratricem in N. ergo ex priori parte huius AI. non est tertio loco proportionalis. Quod est absurdum.

Sed ratio DB. ad DA. ponatur minor, quam DA. ad AE. fiantque eadem. ac sit vt DB. ad DA. id est, ad AB. ita AB. ad AP. erit AP. maior quam AE. (nam cum sit vt DB. ad AB. ita AB. ad AP. minor autem sit ratio DB. ad AB. quam AB. ad AE. minor etiam erit ratio AB. ad AP. quam AB. ad AE. ideoque maior est AP. quam AE.) ergo descripti Quadrantis AQP. basis AP. cadet vltra punctum E. & vltra tangentem EL. secabit igitur arcus QP. tangentem EL. verbi gratia in R. ideoque cum tangens EL. cadat extra Quadratricem, etiam punctum R. cadet extra Quadratricem, ac proinde Quadrans AQP. secabit Quadratricem in S. Non igitur basis AP. est tertio loco proportionalis arcui DB. & semidiametro AD. ex prima parte huius. Erit igitur basis AE. Quod erat &c.

SCHOLIVM.

Ex dictis manifestum est Quadratricem non sua basi, quæ vere neque extat, neque extare potest, ad circuli tetragonismum conducere, sed suamet essentia; ad quam si habitudinem habeat Quadrans interior qualem modo diximus, ita vt eam neque sua peripheria, neque sua tangente secet, erit dicti Quadrantis basis arcui primarij Quadrantis, & semidiametro tertio loco proportionalis. Veteres tamen cum basim Quadratricis, motu, qui ad eam peruenire non potest, definierunt; repexisse videntur ad punctum quoddam in basi Quadrantis, ad quod linea motu progunita, seu potius punctum intersectionis motum continuo magi accedit, ac tandem propius quam ad aliud vllum punctum, quod in basi designari possit; ita vt si vel minimam molem haberent illa, tandem sese contingerent. Quo pacto, & nos tum in-

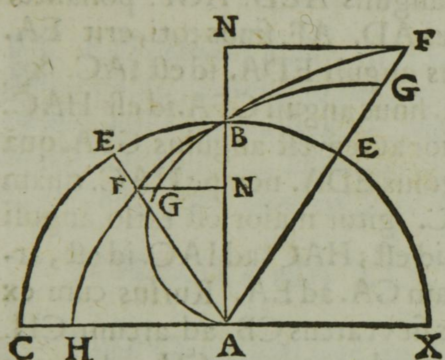
hac

hac linea, tum in alijs Quadratricibus, quas in demonstrationes adducemus, BASIS notionem aßumemus.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVIII.

QVadratrix ſpiralem tangit in puncto, vbi vtraque Quadrantem ſecat.

In ſemicirculo CBX. cuius centrum A. ſint deſcriptæ ſpiralis ABG. & Quadratrix HBF. ſecantes ſemicirculum dictum in puncto B. a quo erectum eſt latus Quadrantis AB. vt patet ex earum deſcriptione. Dico quod quadratrix HBF. ſpiralem ABG. contingit in puncto B. Ducatur, AE. ſecans ſpiralem in G. & Quadratricem in F. Quadrantem in E. & FN. ſecet BA. perpendiculariter: Erit, ex deſcriptione ſpiralis, vt BA. id eſt, EA. ad AG. ita arcus Quadrantis BC. ad arcum EC. & vt BA. ad NA. ita idem Quadrantis arcus BC. ad arcum EC. ex deſcriptione Quadratricis; ergo vt BA. ad AG. ita BA. ad AN. æquales igitnr ſunt AG. AN. At vero in triangulo rectangulo FNA. baſis FA. maior eſt quam latus NA. ergo FA. maior eſt quam GA. ideoque punctum F. cadit ſura punctum G. Idemque in quolibet alio puncto Quadratricis demonſtrabitur: Tota igitur Quadratrix cadit extra ſpiralem, ac cum ea in ſolo puncto B. concurrit. Quod erat demonſtrandum.



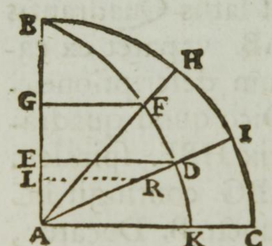
9. 5.
19. 1.

THEO-

THEOREMA XVIII. PROPOS. XIX.

RAdius Quadratricis in Quadrante vicinior basi, remotiore minor est.

In Quadrante ABC. cuius basis AC. latus erectum AB. centrum A. sit Quadratrix BK. cuius basis AK. radij AD. AF. ille vicinior, hic remotior a basi AK. ac secantes Quadrantis arcum ille in I. hic in H. Dico radium AD. minorem esse radio AF. Si enim non sit minor, erit vel æqualis, vel miuor. Sit primum æqualis: ac ductis FG. DE. ad AB. perpendicularibus in triangulis rectangulis AED. AGF. ponantur



bases AD. AF. sinus toti, erit EA. sinus anguli EDA. id est IAC. & GA. sinus anguli GFA. id est HAC. maior autem est angulus GFA. quã angulus EDA. nempe HAC. quam IAC. igitur maior est ratio anguli GFA. ad angulum EDA. id est; HAC. ad IAC. id est, arcus HC. ad arcum IC. quam GA. ad EA. Rursus cum ex descriptione Quadratricis sit vt arcus CB. ad arcum CH. ita BA. ad AG. erit conuertendo, vt arcus CH. ad arcum CB. ita AG. ad AB. sed ex eadem descriptione, est vt arcus CB. ad arcum CI. ita AB. ad AE. ergo ex æquali, erit vt arcus HC. ad arcum IC. ita recta GA. ad rectam EA. Quod est absurdum; ostensa est enim ratio maior HC. ad IC. quam GA. ad EA. Sed AD. dicatur esse maior quam AF. abscindatur AR. æqualis ipsi AF. & ducatur RL. ad AB. perpendicularis, cadet punctum L. sub punctum E. maiorque erit EA. quam LA. Rursus autem, vt priori parte huius, ostendemus minorem esse rationem GA. ad LA. quam HC. ad IC. sed adhuc minor est ratio GA. ad EA. quam GA. ad LA. igitur minor est ratio GA. ad EA. quam HC. ad IC. est autem, & eadem ratio GA. ad AE. quæ

29. 1.

Corol. 1. 28.
1. huius.
33. 6.
14. huius.

8. 5.

arcus

arcus HC. ad arcum IC. vt prima parte huius probatum est. Quod est absurdum, non igitur AD. maior est quam AF. sed nec æqualis, igitur minor. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc colligitur basim Quadratricis esse omnium radiorum minimum; & reliquorum minores qui basi viciniores.

COROLLARIVM. II.

Rursus constat differentias radiorum Quadratricis, & Quadrantis eo maiores esse, quo basi viciniores: vt DI. esse maiorem ipsa FH. inæquales enim AD. AF. illa minor, hæc maior ex æqualibus AI. AH. relinquunt inæquales DI. FH. illam maiorem hanc minorem.

15. defin.
5. pron.

THEOREMA XIX. PROPOS. XX.

Sinus Quadratricis in Quadrante basi vicinior, remotiore maior est.

Sint eadem quæ superiori propositione. Dico sinum Quadratricis ED. qui vicinior est basi AIC. esse maiorem sinu GF. qui remotior est. Si enim non sit maior, sit æqualis, aut minor: ac sit primum æqualis; ponanturque sinus toti rectæ GF. ED. erit GA. tangens anguli GFA. id est, HAC. & EA. tangens anguli EDA. id est, IAC. & maior est angulus GFA. angulo EDA. id est HAC. ipso IAC. Igitur maior est ratio tangentis GA. ad tangentem EA. quam anguli GFA. ad angulum EDA. id est, quam anguli HAC. ad angulum IAC. id est, quam arcus HC. ad arcum IC. Sed etiam ex descriptione Quadratricis, & ex

29. 1.

26. primi huius.

pro-

progressu superioris propositionis, est vt GA. ad EA. ita HC. ad IC. Quod est absurdum; probatum enim est esse maiorem rationem GA. ad EA. quam HC. ad IC. Sed dicatur esse minor ED qnam GF. erit ipsius tangens minor, quam cum ponitur æqualis ipsi GF. Igitur tunc multo maior erit ratio GA. ad EA. quam anguli GFA. ad angulum EDA. id est, quam HAC. ad IAC. id est, quam arcus HC. ad arcum IC. Quod est absuadum; cum ex progressu prioris propositionis, & prima parte huius, constet esse vt GA. ad EA. ita HC. ad IC. Non ergo ED. ipsi GF. æqualis est, aut minor; igitur maior. Quod erat probandum.

8. 5.

COROLLARIVM.

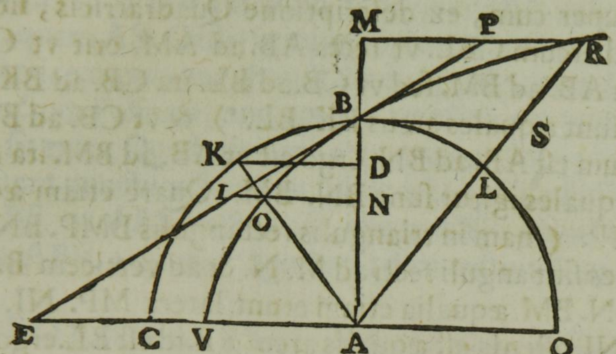
Hinc constat basim Quadratricis esse omnium sinuum ipsius Quadratricis maximum; reliquorum eos esse maiores, qui illi propinquiores fuerint.

THEOREMA XX. PROPOS. XXI.

SI recta ex puncto vbi Quadratrix Quadrantem secat ducta auferat ex basi Quadrantis producta rectam æqualem arcui Quadrantis; ea in dicto puncto tanget Quadratricem.

Sit Quadrans ABC. cuius basis AC. latus erectum AB. in quo Quadratrix VB. secans arcum Quadrantis in B. puncto: a quo ducta BE. auferat ex basi AC. producta rectam AE. æqualem arcui Quadrantis CB. Dico quod recta EB. producta tangit Quadratricem in puncto B. sumantur duo quibet arcus æquales BK. BL. vltra citraque punctum B. per quos ducantur semidiametri AK. AL. secantes Quadratricem, illa in O. ista producta in R. a quibus punctis ducantur ON. RM. perpendiculares ad AB. productam,

ductam, seu parallelæ ad AC. secantes lineam BE. illa in I. ista in R. item sinus KD. arcus KB. & BS. tangens arcus



BL. Quoniam O. est punctum in Quadratrice, erit ex descriptione Quadratricis, vt arcus Quadrantis BC. ad arcum KC. ita BA. latus erectum ad AN. rectam, & per conuersionem rationis vt CB. ad BK. ita AB. ad BN. & cum in triangulis ABE. NBI. rectangulis ad N. & A. etiam communis sit angulus ad B. vt ideo æquiangula sint, erit vt BA. ad BN. ita AE. ad NI. ergo vt BC. ad BK. ita AE. ad NI. & permutando vt arcus BC. ad rectam AE. ita arcus BK. ad rectam NI. æquales autem ponuntur BC. & AE. æquales igitur erunt NI. & BK. Rursus cum DB. sit sinus versus arcus KB. maior erit ratio AB. ad BD. quam arcus CB. ad arcum BK. & vt arcus CB. ad arcum BK. ita AB. ad NB. ex descriptione Quadratricis, igitur maior est ratio AB. ad BD. quam AB. ad BN. minor igitur est BD. quam BN. quibus ablatis ex AB. maior est AD. quam AN. Igitur cum in triangulis æquiangulis ANO. ADK. (ob rectos ad N. D. & communem ad A.) sit vt AD. ad DK. ita AN. ad NO. maior autem sit AD. quam AN. maior erit KD. quam NO. cum ergo recta IN. ostensa sit æqualis arcui KB. arcus autem KB. maior sit sinu recto KD. & sinus KD. ostensus sit maior quam NO. erit NI. maior quam

32. 1.
4. 6.
Lemm. 3. huius.
14. huius.
5. pron.
14. 5.

NO. Cum ergo punctum O. ſit in Quadratrice, erit punctum I. extra Quadratricem; atque idem oſtendetur in quolibet alio puncto Quadratricis intra Quadrantem.

14. huius.

Inſuper cum, ex deſcriptione Quadratricis, ſit arcus CB. ad arcum CBL. vt recta AB. ad AM. erit vt CB. ad BL. ita AB. ad BM. ſed vt CB. ad BL. ita CB. ad BK. (nam poſiti ſunt æquales arcus BK. BL.) & vt CB. ad BK. ita oſtenſum eſt AB. ad BN. ergo eſt vt AB. ad BM. ita AB. ad BN. æquales igitur ſunt BN. BM. Quare etiam æquales NI. MP. (nam in triangulis rectangulis BMP. BNI. cum æquales ſint anguli recti ad M. N. & ad verticem B. & latera BN. BM. æqualia etiam erunt latera MP. NI.) ſed recta NI. oſtenſa eſt æqualis arcui KB. id eſt BL. ergo etiam MP. eſt æqualis arcui BL. qui minor eſt ſua tangente BS. & tangens BS. minor quam MR. (vt enim AB. minor ad AM. maiorem, ita BS. minor ad MR. maiorem, in triangulis æquiangulis ABS. AMR. ob angulos rectos ad B. M. & communem ad A.) Quare etiam MP. minor eſt quam MR. caditque punctum P. inter M. & R. cumque R. ſit in Quadratrice, erit punctum R. extra Quadratricem; atque idem oſtendetur in quolibet alio puncto Quadratricis extra circulum: Igitur recta EBP. tota cadet extra Quadratricem, præterque in puncto B. illam igitur continget. Quod erat probandum.

9. 5.

26. 1. Archimed. Sphera & Cylindro.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXII.

SI lineam Quadratricem recta contingat in puncto vbi circulum ſecat; anguli quos cum latere erecto Quadrantis facit linea contingens, inæquales ſunt; & is quidem qui ad præcedentia conſtituitur eſt obtuſus, qui ad ſequentia acutus.

Sint

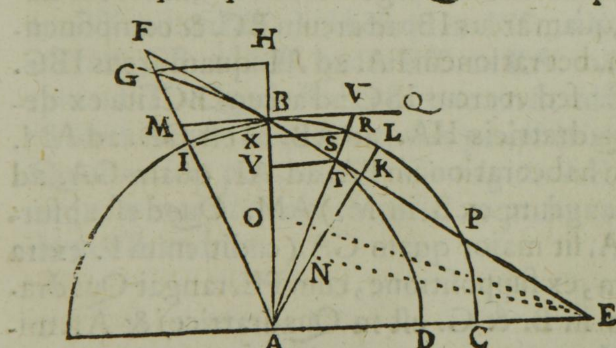
Sint omnia quæ superiori propositione, & recta EB. producta tangat Quadratricem in B. Dico angulum ABP. esse obtusum, atque ideo ABE. acutum. Nam vt MA. ad AB. ita RA. ad AS. maior autem est MA. quam AB. igitur maior RA. quam AS. Cadit igitur punctum S. infra R. intra Quadratricem, cum punctum R. sit in Quadratrice: sed adhuc punctum P. lineæ contingentis transit supra punctum R. cum sit extra Quadratricem, ergo multo magis punctum P. est supra punctum S. maior igitur est angulus ABP. angulo ABS. at ABS. rectus est, igitur ABP. obtusus est, ideoque ABE. acutus. Quod erat demonstrandum.

11. defin. 13. 1.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXIII.

SI Quadratricem recta linea contingat in puncto vbi circulum secat; ea coibit cum basi Quadrantis cui inscribitur: & pars dictæ basis inter centrum circuli, & contingentem erit æqualis arcui Quadrantis.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. basis AE. latus erectum AB. in quo Quadratrix descripta DBG. cuius basis AD. quæ quidem extra Quadrantem producatur, eo modo quo decima quarta propositione huius demonstratum est, ita vt pars DB. intra pars BG. cadat



extra Quadrantem, cumque secet in B. puncto in quo

Quadratricem tangat recta FBE. Dico quod recta FBE. coibit cum basi AC. producta verbi gratia in E. & quod recta AE. erit æqualis arcui Quadrantris BC. Primum euidens est, angulus enim BAE. rectus est ex suppositione, & ABE. acutus ex demonstratis, coeunt igitur AE. & BE. Quoad secundum, si AE. non est æqualis arcui BC. erit vel maior vel minor sit. Primum maior, & sumatur EN. minor quidem quam AE. maior vero quam peripheria BC. & arcus BP. diuidatur bifariam in L. ductaque AL. secet tangentem in K. ideoque eius partem BP. bifariam, quapropter & ad angulos rectos. Erit igitur vt BA. ad AE. ita BK. ad KA. sed BA. ad NE. minorem, maiorem habet rationem, quam BA. ad AE. maiorem. Igitur BA. ad NE. maiorem habet rationem quam BK. ad KA. Cum igitur circulus sit BC. & in eo recta BP. minor diametro, poterit duci recta AF. ad productam contingentem BF. ita vt pars eius FI. inter circumferentiam, & productam contingentem, ad lineam IB. iungentem terminos B. I. habeat proportionem, quam BA. ad NE. Cum igitur sit FI. ad IB. vt BA. ad NE. erit permutando vt FI. ad AB. id est AI. ita IB. ad NE. sed recta IB. ad NE. minorem habet rationem quam arcus IB. ad arcum BC. (est enim VB. arcus maior quam subtensa IB. & arcus BC. ex suppositione minor quam EN.) ergo FI. ad AI. minorem habet rationem, quam arcus IB. ad arcum BC. & componendo minorem habet rationem FA. ad AI. quam arcus IBC. ad arcum BC. sed vt arcus IBC. ad arcum BC. ita ex descriptione Quadratricis HA. ad AB. id est GA. ad AM. ergo minorem habet rationem FA. ad AI. quam GA. ad (ducta BM. tangente ex B. in M.) AM. Quod est absurdum, cum FA. sit maior quam GA. (cadit enim F. extra Quadratricem, ex suppositione, cum FE. tangat Quadratricem tantum in B. & G. est in Quadratrice) & AI. minor quam AM.

22. huius.
13. pron.
4. prop. de Spir. Archim.
30. 3.
28. 3.
3. 3.
8. 6.
8. 5.
7. p. de Spiralib. Archim.
8. 5.
14. huius.

BC.

Sed sit si fieri potest AE. minor quam circumferentia BC. & sumatur recta EO. maior quidem quam EA. minor vero quam arcus BC. & a puncto B. ducatur BQ. æquidistans ipsi AE. Rursus quia in circulo BC. sumpta est BP. diametro minor, tangatque BQ. circulum in B. & minor sit ratio BA. ad EO. quam BK. ad KA. (est enim vt BA. ad AE. ita BK. ad KA. & BA. ad AE. minorem quantitatem maior est ratio, quam BA. ad EO. quæ maior posita est) potest igitur à centro A. duci quæpiam recta AV. ad BQ. tangentem circuli, ita vt SR. inter circulum BC. & ductam FBE. intercepta ad lineam BV. partem contingentis, inter ductam & contactum, habeat eandem rationem quam BA. ad EO. Secet autem eadem ducta Quadratricem in T. tangentem Quadratricis in S. & circulum in R. tangentem circuli in V. Quoniam igitur est vt SR. ad BV. ita BA. ad EO. erit permutando vt SR. ad AB. id est ad AR. ita BV. ad EO. sed BV. ad EO. maior est proportio quam arcus BR. ad arcum BC. (nam tangens BV. est maior arcu BR. & EO. minor arcu BC. ex hypothesi) igitur maior erit ratio SR. ad AR. quam BR. ad BC. sed est, ex descriptione Quadratricis, vt BR. ad BC. ita BY. (ducta TY. perpendiculari ad AB. ex T. puncto Quadratricis) ad BA. Igitur maior est ratio SR. ad AR. quam BY. ad AB. sed BY. ad AB. maior est ratio quam XY. ad XA. (ducto sinu RX. arcus BR.) id est quam RT. ad RA. igitur maior est ratio SR. ad RA. quam RT. ad RA. maior ergo est SR. quam RT. Quod est absurdum cum sit minor. Nam S. est in linea tangente, quæ vicinior peripheriæ existit, quam Quadrarricis punctum T. Cum igitur AE. neque maior, neque minor sit quam arcus BC. æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

4. prop. de Spiral. Archimedis.

8. 6.

8. 5.

8. prop. Spiral. Archimedis.

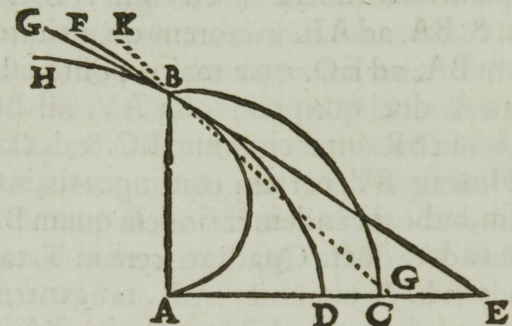
14. huius.

10. 5.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIV.

PRopositum sit idem aliter demonstrare.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. basis AC. latus erectum AB. in quo Quadratrix eũ secet in B. puncto in quo eandem Quadratricem tangat recta FBE. Dico quod recta FBE secans AE. basim Quadratricis in E. abscindit rectam AE. æqualem arcui Quadrantis BC.



Inscribatur eidem Quadranti spiralis ABH. quæ, vt patet ex descriptione, transibit per B. in quo puncto Quadratrix spiralem contingit. Cum igitur, ex hypothesi recta FBE. Quadratricem contingat in B. tota, puncto B. excepto, cadet extra Quadratricem; & quia Quadratrix spiralem tangit in B. tota extra eam cadit, ac solo puncto B. concurrit: Igitur etiam recta FE. tota extra spiralem cadit, nec nisi puncto B. cum ea congruit: tangit igitur FE. spiralem in B. Manifestum igitur est ex 20. propositione spiralium Archimedis, quod recta AE. arcui BC. æqualis existit. Quod erat.

18. huius.

20. Spiral. Archimedis.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXV.

EIusdem propositionis alia demonstratio.

Sit rursus Quadrans ABC. cuius centrum A. basis AC. latus erectum AB. in quo Quadratrix DBG. eum secet in B. puncto, in quo eandem Quadratricem tangat. Dico quod recta FBE. secans AE. basim Quadratricis producta

ctam

ctam in E. abscindit rectam AE. æqualem arcui Quadrantis BC. Si enim AE. non sit æqualis arcui Quadrantis, sit eidem æqualis AG. & ducatur GBK. item spirales ABH. patet ex 21. huius quod KBG. tangit Quadratricem in B. sed & ponitur FBE. tangere eandem Quadratricem in B. duæ igitur KBG. FBE. Quadratricem tangunt, igitur vtraque extra Quadratricem cadit, ac in solo puncto B. conuenit; sed & Quadratrix spiralem tangit in B. igitur tota, puncto B. excepto, extra eam cadit, ergo vtraque recta FBE. KBG. extra spiralem cadit, solo puncto B. conuenit, ideoque illam contingit in B. Quod est absurdum, non enim duæ rectæ spiralem in eodem puncto contingunt. Ergo recta AE. est æqualis arcui Quadrantis BC. Quod erat demonstrandum.

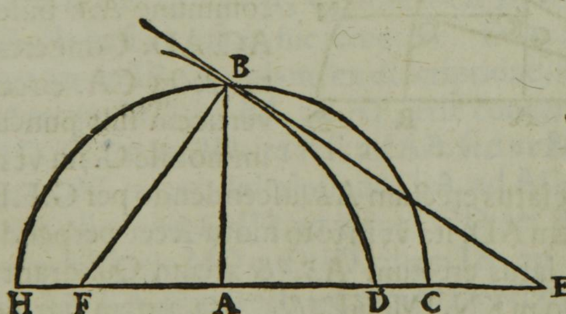
21. huius.

8. huius.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVI.

SI perpendicularis ad tangentem Quadratricis ex puncto contactus ducta basim Quadrantis productam secet: erit pars dictæ basis inter centrum Quadrantis, & ductam, æqualis basi Quadratricis.

Sit circulus HBC. cuius centrum A. diamter HC. latus erectum AB. diuidens arcum HBC. in duos Quadrantes HB. BC. ac illius quidem basis sit HA. istius autem itidem basis



Quadrantis AC. Quadratrix GBD. cuius basis AD. secans

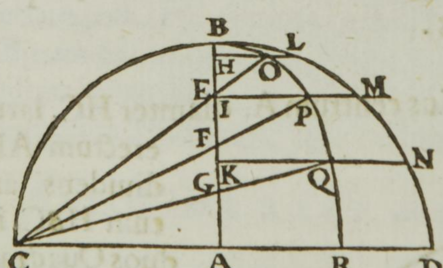
ſecans circulum in B. Tangens Quadratricis in puncto B. ſit BE. ſecans baſim AC. productam in E. & ex *B*. ad *BE*. ducatur perpendicularis *B*E. ſecans baſim AC. productam in F. (ſecabit autem cum angulus *B*EF. ſit acutus, & F*B*E. rectus.) Dico rectam AF. eſſe æqualem AD. baſi Quadratricis. Conſtat enim ex Pappo lib. 4. p. 16. & Clauio p. 4. de Quadratrice, baſim Quadratricis eſſe tertio loco proportionalem arcui Quadrantis, & ipſius ſemidiametro nimium vt *B*C. ad *B*A. ita *B*A. ad AD. Cum autem rectangulum ad *B*. ſit triangulum F*B*E. & in baſim FE. demiſſa perpendicularis *B*A. erit vt EA. ad A*B*. ita A*B*. ad AF. at vero EA. eſt æqualis arcui Quadrantis, vt igitur *B*C. ad *B*A. ita *B*A. ad AF. ergo vt *B*A. ad AD. ita *B*A. ad AF. quare æquales ſunt AD. AF. Quod erat demonſtrandum.

13. Pronun.
8. 6.
23. 24. 25. huius.
11. 5.
9. 5.

PROBLEMA II. PROPOS. XXVII.

QVadratricem differentialem delineare.

Sit ſemicirculus C*B*D. cuius centrum A. diameter CD. perpendicularis A*B*. quæ eum diuidat in duos Quadrantes, quorum latus erectũ commune A*B*. baſes AC. AD. Conuertatur recta CA. circa verticem ſint punctũ immobile C. ita vt in



toto motu ſecet latus erectum A*B*. aſcendendo per G. F. E. *B*. moueatur item AD. ita vt in toto motu ſecet perpendiculariter idem latus erectum A*B*. & arcum Quadrantis D*B*. aſcendendo in KN. IM. HL. &c. Ita autem fiat geminus ille motus, vt quæ ratio lateris erecti *B*A. ad partem

tem abſciſſam GA. a recta CG. eadem ſit arcus Quadratis BD. ad arcum ſectum DN. Item in illis motibus productæ CG. CF. CE. occurrant perpendicularibus, ſeu ſinibus (qui arcus proportionales abſcindunt ex arcu Quadrantis) in punctis Q. P. O. punctum concurſus deſcribet veſtigio ſuo lineam curuam RQPOB. extra Quadrantem ABC. Et quidem quod concurrant lineæ CQ. KN. patet, quia cum angulus CAG. ſit rectus, erit CGA. acutus, ideoque & æqualis ad verticem KGQ. acutus erit, eſt autem GKQ. rectus, concurrent igitur KQ. GQ. Quod vero concurrant vltra Quadrantem ABC. ita probatur. Quoniam peripheria Quadrantis BD. & latus erectum AB. ſimiliter diuiduntur, perpendicularis NK. auferet ex latere recto rectam KB. minorem ipſa GB. punctum igitur G. cadet ſub punctum K. ideoque recta CG. producta occurret ipſi NK. vltra AB. in puncto Q. Hanc autem lineam Quadratricem Differentialem vocamus, eo quod eius baſis, vt poſtea oſtendemus, ſit differentia arcus Quadrantis, & eius ſemidiametri.

13. 1.

13. pron.

Lemm. 4. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVIII.

Sinus Quadratricis differentialis baſi vicinior remotiore maior eſt.

In figura ſuperiori, Quadratricis BPR. ſint ſinus KQ. IP. ille baſi vicinior, hic remotior. Dico KQ. eſſe maiorem quam IP. Quoniam, ex deſcriptione, eſt vt arcus BD. ad arcum MD. ita BA. ad AF. erit conuertendo vt arcus MD. ad arcum BD. ita AF. ad AB. ſed vt BD. arcus ad arcum DN. ita, ex deſcriptione, BA. ad AG. ergo ex æqualitate eſt vt arcus MD. ad arcum ND. ita AF. ad AG. ſed maior eſt ratio MD. ad ND. quam IA. ad KA. (ſunt enim IA. KA. ſinus recti arcuum MD. ND.) Igitur maior eſt ratio AF. ad AG. quam IA. ad KA. & permutando,

27. huius.

Corol. 1. 28. 1. huius.

conuertendo, ac diuidendo minor ratio IF. ad FA. quam KG. ad GA. Vt autem IF. ad FA. ita IP. ad CA. (æquiangula enim sunt triangula CAF. PIF. ob rectos ad A. I. & æquales ad verticem F.) & vt KG. ad GA. ita KQ. ad CA. (æquiangula enim sunt, ob eandem causam, triangula CAG. QKG.) ergo minor est ratio IP. ad CA. quam KQ. ad CA. minor igitur est IP. quam KQ. Quod erat demonstrandum.

4. 6. 32. 1. 15. 1. 10. 5.

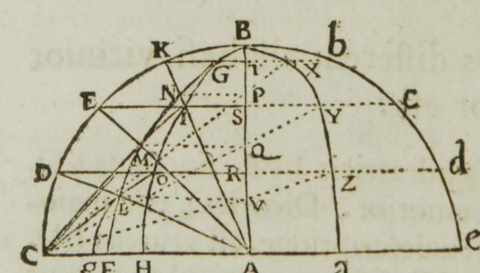
COROLLARIVM.

Hinc apparet basim Quadratricis differentialis esse omnium ipsius sinuum, maximum: reliquorum maiores qui ei propinquiores fuerint.

PROBLEMA III. PROPOS. XXIX.

Qvadratricem Arithmeticam describere.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. basis AC. in quo Quadratrix prima seu Geometrica BNF. Iam vero proposita linea motu triũ rectarum perficietur. Primo circa centrum A. tanquam cardinẽ moueatur semidiameter AC. ita vt continuo Quadratricem secet in varijs punctis



L. M. N. &c. & eius extremitas C. Quadrantem CB. percurrat, per puncta D. E. K. B. &c. per quæ ductæ perpendiculares ad AB. nempe DR. ES. KT. quæ sunt sinus complementorum arcuum DC. EC. KC. etiam continuo cum dictis punctis moueantur; denique recta CA. circa verticem C. punctum, in quo basis & arcus Quadrantis coeunt,

mo-

moueatur ſurſum ſimul cum punctis, in quibus ſemidiameter AC. AD. AE. Quadratricem primariam ſecat, & occurrat perpendicularibus, ſeu ſinibus in punctis O.I.G. deſcribet punctum illud concurſus lineam curuam HGB. quam Quadratricem differentialem libet nuncupare, eo quod eius baſis, vt poſtea oſtendemus, arcui Quadrantis, & eius ſemidiametro ſit tertio loco Arithmetice proportionalis.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXX.

Differentiæ ſinuum Quadrantis, & Quadratricis Arithmeticæ ſunt æquales ſinibus Quadratricis differentialis.

Sit in ſuperiori ſchemate ſemicirculus C*B*Q. cuius centrum A. quem diuidat latus A*B*. erectum ſuper baſim CQ. in duos Quadrantes A*B*C. A*B*Q. ac in primo ſint duæ Quadratrices, altera Geometrica *B*F. altera Arithmetica *B*H. Ducatur ſemidiameter AD. ſecans Quadratricem primam in L. & circulum in D. hinc perpendicularis DRd. ſecans latus A*B*. in R. & alterum Quadrantem in d. cui occurrat CL. recta in O. erit O. punctum Quadratricis Arithmeticæ. Rurſum ex L. ducatur ad A*B*. perpendicularis LV. erit vt *B*A. ad AV. ita arcus *B*C. ad arcum CD. ſeu arcus *B*Q. ad arcum dc. Quare ſi connectatur CV. & producatur dum ſecet Dd. in Z. erit Z. punctum Quadratricis differentialis, atque ideo erit DR. ſinus arcus D*B*. in Quadrante C*B*. & OR. ſinus in Quadratrice Arithmetica *B*H. recta vero OD. differentia ſinuum DR. OR. denique RZ. erit ſinus in Quadratrice differentiali *B*XYZ. deſcripta per puncta aZYX. modo 27. huius explicato. Dico RZ. rectam, eſſe rectæ DO. æqualem Quoniam parallelæ ſunt DO. CA. erunt in triangulis DLO. ALC. anguli D. O. angulis A.C. & anguli ad verticem L. æquales, æquiangula igitur ſunt

29. huius.

14. huius.

27. huius.

27. huius.

29. 1.

4. 6. dicta triangula, quare vt CA. ad OD. ita AL. ad DL. sed
2. 6. vt AL. ad DL. ita in triangulo ADR. (in quo positæ sunt
4. 6. DR. LV. parallelæ) AV. ad VR. & vt AV. ad VR. ita CA. ad RZ. (æquiangula enim sunt rriangula CAV. ZRV. ob eandem rationem, qua diximus esse æquiangula
11. 5. CLA. OLD.) ergo vt CA. ad OD. ita CA. ad RZ. æqua-
9. 5. les igitur sunt OD. RZ. Eodemque modo ostendemus SY. esse æqualem ipsi EZ. atque ita in reliquis. Quod fuit probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc euidenter deducitur differentias sinuum Quadrantis, & Quadratricis differentialis esse æquales sinibus Quadratricis Arithmeticæ; nimirum rectam Zd. differentiam sinus Rd. in Quadrante, & sinus RZ. in Quadratrice differentiali, esse æqualem sinui RO. Quadratricis Arithmeticæ BH. æquales enim sunt DR. Rd. igitur ablatis RZ. & DO. quæ modo ostensæ sunt æquales, supersunt ZD. OR. inter se æquales.

COROLLARIVM. II.

Ex dictis etiam colligitur ratio qua altera posteriorum Quadratricum ex altera describatur. Si enim recta Ce. sursum ita moueatur continuo ad AB. perpendicularis vt rectis Aa. RZ. SY. TX. interceptis inter latus erectum, & Quadratricem differentialem Ba. æquales sint CH. DO. EL. KG. ab arcu Quadrantis, describetur Quadratrix Arithmetica HB. Et contra si eadem Ce. modo dicto ita moueatur vt rectis CH. DO. EL. KG. æquales sint Aa. RZ. SY. TX. delineabitur Quadratrix differentialis Ba.

COROL-

COROLLARIVM III.

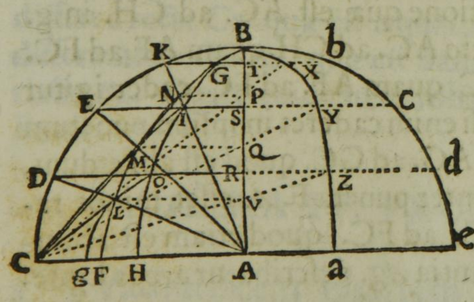
Denique etiam ex demonstratis deduci posset, tam figuram ABa. latere recto AB. linea curua BZa. & basi Aa. contentam esse æqualem figuræ HBC. contentæ linea curua HB. arcu Quadrantis BC. & recta CH. quam figuram ABQ. figura HBA. eo quod lineæ Aa. RZ. SY. TX. lineis HC. OD. IE. GK. item rectæ ae. Zd. Yc. Xb. rectis HA. OR. IS. GT. æquales sint; ideoque trapezia ab ijs constituta quælibet æqualia sint, eadem ratione qua prop. 18. superioris libri probata est, ex polygonis in circulo, atque elipsi analogis, ipsorum circulorum, atque ellipsium analogia, atque æqualitas. Vnde etiam sequeretur figuram HBa. Quadranti esse æqualem. Sed volumus hæc tantum innuisse, vt ea, si libuerit, demonstret cui amplius quam nobis otij fuerit.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXXI.

Basis Quadratricis differentialis est æqualis excessui, quo arcus Quadrantis in quo describitur, sua semidiametro maior est.

Sint eadem omnia quæ duabus superioribus propositionibus. Dico basim Aa. seu CH. Quadratricis differentialis Ba. esse æqualem excessui, quo arcus Quadrãtis BC. suam semidiametrum AB. superat; seu rectam Ca. esse æqualem arcui Quadrantis BC. Est enim vt AC. ad HC. id est ad Aa. illi æqualem, ita AF. ad FC. (vt paulo post ostendemus) & componendo, & per conuersionem

30. huius.



30. huius.

sionem

Pappus lib. 4. prop. 16. & Clauius p. 4. de Quadratricis.

sionem rationis, est aC. ad CA. vt CA. ad AF. sed vt CA. semidiameter Quadrantis ad AF. basim Quadratricis ita arcus Quadrantis *B*C. ad semidiametrum CA. igitur vt aC. ad CA. ita arcus Quadrantis *B*C. ad eandem CA. æquales igitur sunt recta aC. & arcus Quadrantis *B*C. est autem Aa. excessus quo Ca. id est arcus Quadrantis superat semidiametrum CA. Quare patet id quod propositum est.

9. 5.

Quod autem sit vt AC. ad HC. ita AF. ad FC. ita demonstratur. Si non sit eadem ratio AC. ad HC. quæ AF. ad FC. erit vel minor, vel maior. Sit primo minor: ideoque fiat vt AF. ad FC. ita AC. ad quampiam minorem ipsa CH. verbi gratia ad DO. (est enim maior quolibet sinu sequente DO. FI. KG.) erit igitur vt AF. ad FC. ita AC. ad DO. sed vt AC. ad DO. ita AL. ad LD. (æquiangula enim sunt triangula CAL. ODL. ob angulos æquales ad verticem L. & alternos ad D. A. & O. C. inter parallelas DO. CA. ideoque vt CA. ad OD. ita AL. ad DL.) est igitur vt AF. ad FC. ita AL. ad LD. sed AL. maior est quam AF. & DL. minor quam CF. maior igitur est ratio AL. ad LD. quam AF. ad FC. sed & probata est æqualis. Quod est absurdum; Non igitur minor est ratio AC. ad HC. quã AF. ad FC. Sed dicatur esse maior. erit ergo AF. ad FC. minor ratio, quam AC. ad CH. Fiat igitur vt AC. ad CH. ita recta quæpiam Ag. maior quam AF. ad gC. (si enim diuidatur AC. ea proportione quæ est AC. ad CH. in g. puncto, cum maior sit ratio AC. ad CH. quam AF. ad FC. erit maior ratio Ag. ad gC. quam AF. ad FC. cadet igitur punctum g. inter F. & C. si enim caderet in ipsum punctum F. esset vt AF. ad FC. ita AG. ad GC. quod est absurdum, & contra hypothesin: si inter puncta F. *A*. esset minor ratio *A*g. ad GC. quam *A*F. ad FC. quod etiam est absurdum) & centro *A*. distantia *A*g. describatur arcus Lg. secans Quadratricem in L. (secabit autem, cum continuo Quadratricis radij augeantur in Quadrante, quare si non

28. huius. 4. 6. 15. 1. 29. 1. Corol. 1. 19. huius. Corol. 2. 19. huius. 19. huius.

secaret

ſecaret eſſet *Ag* maior ſemidiametro, quod eſt abſurdum, cum ſecta ſit ſemidiameter *A*C. in puncto g.) Quoniam æquales ſunt *Ag*. *A*L. item *A*D. *A*C. à centro ad circumferentiam, erit vt *Ag*. ad gC. ita *A*L. ad LD. ſed vt *Ag*. ad gC. ita *A*C. ad CH. ex hypotheſi, ergo vt *A*L. ad LD. ita *A*C. ad CH. ſed vt *A*L. ad LD. ita *A*C. ad DO. (vt ſuperius probatum eſt, ex ſimilitudiue triangulorum C*A*L. ODL.) ergo vt *A*C. ad CH. ita *A*C. ad DO. æquales igitur ſunt HC. & DO. Quod eſt abſurdum: maior enim eſt HC. id eſt *A*a. quam DO. id eſt quam RZ. Igitur cum *A*C. ad CH. non ſit aut minor, aut maior ratio quam *A*F. ad FC. erit eadem. Ideoque Baſis Quadratricis differentialis &c. Quod probare oportebat.

15. defin.

9. 5.

28. huius.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXXII.

BAſis Quadratricis Arithmeticæ, ſemidiameter Quadrantis in quo deſcribitur, & arcus eiuſdem Quadrantis ſunt in medietate Arithmetica; quorum differentia eſt baſis Quadratricis differentialis.

In eadem figura ſuperioris propoſitionis *B*aſis *A*H. Quadratricis *A*ritmeticæ *B*H. differt à ſemidiametro Quadrantis C*A*. recta HC. quæ æqualis eſt rectæ *A*a. baſi Quadratricis differentialis *B*a. & ſemidiameter Quadrantis C*A*. differt à recta Ca. quæ eſt æqualis arcui Quadrantis *B*C. differentia rectæ Aa. quæ eſt baſis Quadratricis differentialis *B*a. Quare euidenter probatum eſt quod proponebatur.

30. huius.

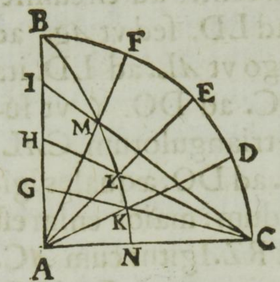
31. huius.

PROBLEMA IV. PROPOS. XXXIII.

QVadratricem quartam, ſeu diuiſiuam deſcribere.

Sit

Sit Quadrans A*B*C. cuius centrum A. latus erectum *AB*. basis *A*C. circa centrum *A*. immotum moueatur sursum semidiameter *A*C. secans continuo arcum Quadrantis C*B*. & circa punctum C. tanquam cardinem fixum moueatur sursum recta C*A*. ita vt continuo secet latus erectum *AB*. ea ratione qua *AB*. secat arcum Quadrantis, & punctum intersectionis duarum linearum *A*C. C*A*. describat lineam curuam NKLM*B*. Hanc libet Quadratricem quartam, seu diuisiuam ἀντονομαστικῶς nuncupare, eo quod non tantum quadrando lineariter circulo, sed facile præ cæteris diuidendo, accommodata sit.



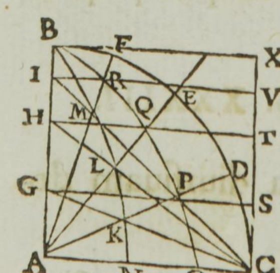
COROLLARIVM

Manifestum est ex descriptione esse vt BC. ad CD. ita BA. ad AG. cum in easdem rationes BC. & BA. a lineis sursum motis AD. & CG. diuidantur.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXIV.

Radij Quadratricis quartæ a basi remotiores vicinioribus sunt maiores.

Sit Quadrans *AB*C. cuius centrum *A*. latus erectum *AB*. basis *A*C. & in eo quadratrix quarta *B*N. modo & notis superioris propositionis descripta, cui accedat Quadratrix prima seu Geometrica *B*O. cuius basis *A*O. quas secent semidiametri *A*D. *A*E. AF. illam in pun-



punctis K. L. M. istam in punctis P. Q. R. manifestum est quod CG. CH. CI. & perpendiculares PG. QH. RI. ex punctis vbi prima Quadratrix secatur à semidiametris AD. AE. AF. cadent in eadem puncta G. H. I. cum tam lineæ CG. CH. CI. quam perpendiculares PG. QH. RI. diuidant rectam AB. eadem ratione qua diuisus est arcus Quadrantis in punctis D. E. F. perficiatur Quadratum ACXB. circa Quadrantem, & producantur perpendiculares GP. HQ. IR. in S. T. V. puncta lateris erecti Quadrati CX. Dico radium AL. radio AK. esse maiorem. Nam cum æquiangula sint triangula CAK. GPK. ob æquales ad verticem K. & alternos CAK. GPK. inter parallelas AC. GP. erit vt CA. ad AK. ita GP. ad PK. & permutando vt CA. id est SG. ad GP. ita AK. ad PK. & conuertendo sit GP. ad SG. ita PK. ad KA. & componendo vt GP. cum SG. ad SG. ita PA. ad AK. eodem modo ostendemus esse, vt HQ. cum HT. ad HT. ita QA. ad AL. Cum autem maior sit GP. quam HQ. maior erit GP. cum SG. quam HQ cum HT. quæ ipsi SG. est æqualis. Igitur maior est ratio compositæ GP. cum SG. ad SG. quam compositæ HQ. cum HT. ad HT. Quare maior est ratio PA. ad AK. quam QA. ad AL. minor autem est PA. quam QA. igitur minor est AK. quam AL. (nam si æquales erant PA. QA. cum PA. maiorem habeat rationem ad AK. quam QA. ad AL. minor esset AK. quam AL. multo magis sequitur PA. existente minore quam QA. ipsam AK. esse minorem quam AL.) Atque eodem modo ostendemus AL. esse minorem quam AM. Igitur radij Quadratricis, &c. Quod fuit probandum.

15. 1.
29. 1.
4. 6.
20. huius.
4. pronunc.
8. 5.
19. huius.
10. 5.

COROLLARIVM. I.

Hinc colligitur basim quartæ Quadratricis esse minimum omnium radiorum.

COROLLARIVM. II.

4. 6. *EX dictis etiam apparet KC. eſſe minorem quam LC. & LC. quod CM. nam vt PA. ad AK. ita GC. ad CK. ſed PA. ad AK. maior eſt ratio quam QA. ad AL. vt in propoſitione oſtenſum eſt; maior ergo ratio eſt GC. ad CK. quam QA. ad AL. ſed vt QA. ad AL. ita HC. ad CL. maior igitur eſt ratio GC. ad CK. quam HC. ad CL. minor autem eſt GC. quam HC. (ſubtendit enim GC. angulum acutum GHC. & HC. angulum obtuſum HGC. in triangulo HGC.) Igitur ob rationem allatam in fine propoſitionis KC. minor eſt quam LC.*

4. 6.

19. 1.

COROLLARIVM III.

DEnique ſequitur manifeſtè, complementa ſemidiametri inter Quadratricem diuiſiuam & Quadrantem, videlicet NC. KD. LE. MF. ordine decreſcere ita vt maxima ſit NC. ea minor KD. & ipſa KD. minor LE. & ſic deinceps, ſi enim ex æqualibus AC. AD. AE. AF. demantur inæquales, ex prioribus minores AN. AK. AL. AM. vt patet ex propoſitione, remanent inæquales NC. KD. LE. MF. prima maior quam ſecunda, ſecunda quam tertia; atque ita in reliquis.

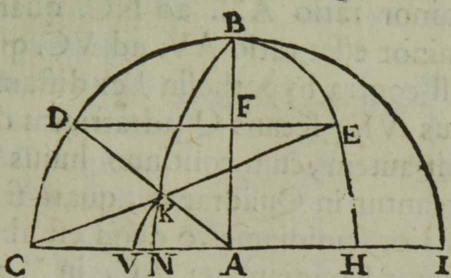
5. pron.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXV.

BAſis Quadratricis diuiſiuæ diuidit ſemidiametrum Quadrantis in quo deſcribitur, in ratione ſemidiametri ad arcum Quadrantis.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. baſis AC. & in eo Quadratrix diuiſiua ſeu quarta BN.

BN. cuius basis NA. Dico quod basis NA. diuidit semidiametrum AC. in ratione Semidiametri AC. ad arcum Quadrantis BC. seu esse vt AC. ad CB. ita NA. ad NC. Continuetur Quadrans CB. in I. & sit CBI. semicirculus, & ABI. Quadrans in quo Quadratrix differentialis seu secunda BEH. cuius basis AH. & in priori Quadrante sit prima Quadratrix BO. Erit vt HC. ad CA. ita CN. ad NA. vt mox probabimus, sed HC. est æqualis arcui Quadrantis BC. (Nam cum AH. sit excessus quo arcus BC superat semidiametrum AC. erit tota HC. æqualis arcui BC.) ergo vt arcus Quadrantis BC. ad semidiametrum AC. ita CN. ad NA Quod vero sit vt HC. ad AC. ita NC. ad AN. ita probatur. Si enim contrarium asseratur, maior erit, aut minor proportio HC. ad AC. quam NC. ad NA. Sit primum maior. Quoniam maior est proportio HC. ad CA. quam NC. ad NA. erit conuertendo minor ratio CH. ad HC. quam NA. ad NC. quare erit eadem ad minorem aliquam ipsa CH. verbi gratia ad DE. parallelam basi AC. & interceptam inter arcum Quadrantis, & lineam quadratricis differentialis, quæ minor est quam CH. (nam DF. sinus arcus DB. est minor sinu toto AC. est FE. minor quam AH. ideoque tota DE. tota CH. minor est) ductisque AD. CE. rectis eę transibunt per idem punctum huius Quadratricis K. vt patet ex descriptione harum linearum 28. & 34. huius atque adeo sit vt AC. ad DE. ita NA. ad NC. Sed vt CA. ad DE. ita AK. ad KD. (ob similitudinem triangulorum CAK. HDK.) ergo vt AN. ad NC. ita AK. ad KD. Sed AK. maior est quam AN. & KD. minor quam NC. ergo maior est ratio AK. ad KD. quam AN. ad NC. sed est etiam eadem. Quod est absurdum.



32. huius.

Corol. 29. huius.

Corol. 1. 35 huius.

Corol. 3. 35 huius.

Sed dicatur ratio HC. ad CA. minor ratione CN. ad NA. erit igitur minor ratio NA. ad CN. quam CA. ad HC. fiatque vt CA. ad HC. ita AV. ad VC. erit AV. maior quam AN. (sit enim esset æqualis remaneret minor ratio AN. ad NC. quam CA. ad HC, si minor, minor esset ratio AV. ad VC. quam AN. ad NC. sed ponitur etiam minor ratio AN. ad NC. quam CA. ad HC. igitur minor esset ratio AV. ad VC. quam CA. ad HC. quod est contra hypothesin) ex distantia AV. describatur arcus VK. secans Quadratricem diuisiuam in K. (secabit autem, cum continuo huius quadratricis radij augeantur in Quadrante, quare si non secaret esset AV. maior semidiametro quod est absurdum cum secta ponatur semidiameter AC. in V. puncto ea ratione, quæ est CA. ad HC.) Quoniam æquales sunt AV. AK. item AC. AD. à centro ad suas circonferentias erit vt AV. ad VC. ita AK. ad KD. sed vt AV. ad VC. ita ex hypothesi CA. ad CH. ergo vt AK. ad KD. ita CA. ad CH. sed est etiã vt AK. ad KD. ita CA. ad DE. (ob similitudinem triangulorum CAK. EDK.) est ergo vt CA. ad CH. ita CA. ad DE. æquales igitur sunt CH. DE. Quod est absurdum, maior enim est DE. sinus totus sinu partiali DF. & AH. basis Quadratricis sinu FE. igitur tota CH. tota DE. maior est. Non igitur ratio HC. ad CE. minor est ratione CN. ad NA. sed nec maior, igitur æqualis ergo basis Quadratricis diuisiuæ &c. Quod erat &c.

35. huius. — *9. 5.* — *Corol. 29. huius.*

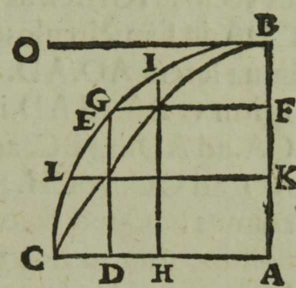
PROBLEMA V. PROPOS. XXXVI.

HActenus nonnullas lineas protulimus, quæ sua potissimum basi, tetragonismo; ipsa vero periocha, diuisioni circuli operam suam conferunt. Ad vltimum autem hoc munus multas alias excogitauimus; quarum ta-

men

men vnam tantum, aut alteram proferemus, ad quarum imitationem, atque exemplum aliæ innumeræ poterunt conformari.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. basis AC. latus erectum AB. tangens eiusdem in puncto B. quælibet recta BO. moueatur latus erectum AB. ex A. versus C. ita vt sit continuo basi AC. perpendicularis; moueatur item tangens BO. deorsum versus A. ita vt sit in toto motu lateri erecto AB. perpendicularis: & qua ratione AB. secat AC. eadem BO. secet arcum Quadrantis BC. nempe cum AB. peruenerit in DE. tangens BO. peruenerit in FG. sitque vt CA. ad AD.



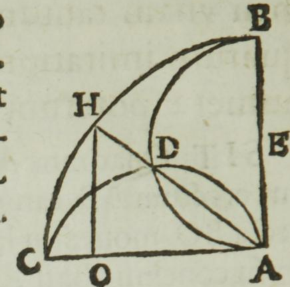
ita CB. ad BG. atque ita deinceps, cum AC. fuerit in HI. sit BO. in KL. sitque vt CA. ad AH. ita CB. ad BL. secent autem sese dictæ rectæ in puncto, quod in toto motu sui vestigium relinquat (vt bi gratia in B. M. N. C.) describetur linea curua BMNC.

PROBLEMA VI. PROPOS. XXXVII.

QVadrantem ita secare vt ducta perpendicularis ad basim arcum Quadrantis, & basim alternatim in eandem rationem diuidat.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. basis AC. spiralis Quadrantis ADB. quam secet in D. semicirculus CDA. centro E. (quod basim AC. bifariam diuidit) descriptus, & ducantur recta CD. & ADH. in peripheria Quadrantis H. tandemque ex H. recta HO.

per-



perpendicularis ad basim CA. Dico esse vt CH. ad HB. ita AO. ad OC. Est enim, ex difinitione spiralis, vt BA. ad AD. ita BC. ad CH. ipsi autem AD. est æqualis AO. (Nam triangula HOA. CDA. habentia angulum communem ad A. & æquales rectos HOA. ex descriptione, & CDA. in semicirculo; & bases AC. AH. æquales, etiam reliqua latera AO. AD. item HO. CD. æqualia habent.) Igitur vt BA. ad AD. ita BA. id est CA. ad AO. ideoque vt CA. ad AO. ita BC. ad CH. & diuidendo & conuertendo AO. ad OC. vt CH. ad HB. Igitur Quadrantem ita secuimus. Quod facere oportebat. Quadrantis autem nomine tum in hoc tum in sequentibus problematis ipsum arcum Quadrantis nuncupabimus, ne eum cum arcu partiali confundamus.

26. 1.

7. 5.

COROLLARIVM.

Hinc efficitur posse secari Quadrantem ducta perpendiculari ad basim, ita vt quæ ratio Quadrantis, ad arcum ea sit sinus totius ad sinum rectum complementi; & sinus totius ad sinum versum complementi, & quæ ratio sinus recti ad sinum versum ea sit arcus respondentis sinui verso ad arcum respondentem sinui recto. Est enim in vltima figura vt arcus Quadrantis CB. ad arcum HC. ita sinus totus AC. ad sinum complementi OA. & vt arcus Quadrantis CB. ad arcum HB. ita sinus totus AC. ad sinum versum complementi CO. denique CH. arcus ad arcum HB. est vt sinus rectus AO. ad sinum versum OC. Ex quibus etiam sequitur posse dicta perpendiculari secari Quadrantem, ita vt sint eius partes in ea ratione alternatim in qua sunt variæ lineæ, quæ habent eandem proportionem, quam aut sinus totus ad sinum rectum, aut idem ad sinum

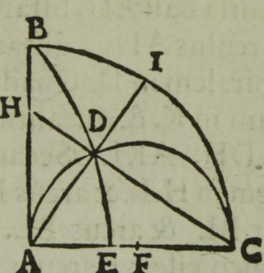
versum,

versum, aut sinus rectus ad sinum versum: Cuiusmodi quamplurima occurrunt apud eos qui de sinibus, tangentibus, secantibus, ac chordis scripserunt, ad quos lectorem remittimus.

PROBLEMA VII. PROPOS. XXXVIII.

QVadrantem ita diuidere, vt quæ proportio Quadrantis ad arcum, eadem sit sinus arcus ad sinum complementi.

Describatur intra Quadrantem ABC. quadratrix diuisiua seu quarta BDE. & diuisa basi quadrantis bifariam in F. centro F. semidiametro FC. describatur semicirculus CDA. secans quartam Quadratricem in D. per quod transeat semidiameter ADI. occurrens Quadrãti in I. & recta CDH. occurens lateri erecto in H. Cum angulus CDA. in semicirculo sit rectus erit CD. sinus rectus arcus CI. & DA. sinus rectus complementi, seu arcus IB. Dico esse Quadrantem BC. ad arcum IC. vt est sinus rectus CD. arcus IC. ad DA. sinum complementi, seu arcus IB. Quoniam BDE. est Quadratrix diuisiua erit vt BC. ad CI. ita BA. id est CA. ad AH. id est CD. ad DA. Ergo Quadrantem ita diuisimus &c. Quod erat faciendum.



33. huius.

31. 3.

33. huius. 8. 6.

COROLLARIVM.

EX hoc Problemate colligitur posse diuidi Quadrantem ea ratione quam habent variæ quantitates eandem cum ratione sinus recti & sinus complementi, ac inter cæteras

ras

ras ea, vt sit eadem proportio Quadrantis ad arcum quæ sinus totius ad tangentem complementi.

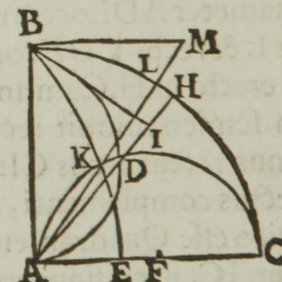
8. 6. *Est enim vt CD. ad DA. id est vt BC. ad CI. ita CA. sinus totus ad AH. tangentem anguli ACH. qui est complementum anguli DAC. scilicet arcus IC.*

PROBLEMA VIII. PROPOS. XXXIX.

QVadrantem ita secare vt duorum arcuum, quæ ratio prioris ad posteriorem eadem sit sinus complementi prioris ad tangentem complementi posterioris.

1. defin. huius. 33. huius.

SIT Quadrans sæpe dictus intra quem descriptæ sint duæ lineæ BDA. spiralis & BKE. quarta Quadratrix; & diuisa basi AC. bifariam in F. describatur centro F. semicirculus ADC. distantia FC. secans spiralem in D. Quadratricem quartam in K. & ducantur semidiametri ADH. AKL. Secantes Quadrantem in H. L. & arcus BH. sinus rectus sit BI. & arcus BL. tangens BM. Dico esse vt arcum HC. ad arcum LC. ita BI. sinum complementi HC. ad BM. tangentem complementi arcus BL. Cum enim sit vt BC. ad HC. ita AB. ad BI. vt patet ex progressu 37. huius erit conuertendo vt HC. ad BC. ita BI. ad AB. est autem vt BC. ad CL. ita AB. ad BM. igitur ex æqualitate erit vt HC. ad CL. ita BI. ad BM. Quare quadrantem ita secuimus &c. Quod facere oportebat.



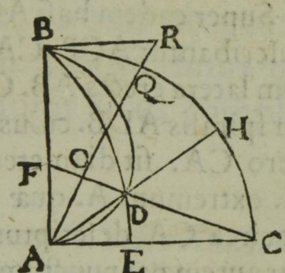
37. huius.

Coroll. 38. huius.

PROBLEMA X. PROPOS. XL.

QVadrantem ita ſecare vt quæ ratio Quadrantis ad complementum dupli arcus, eadem ſit ſinus totius ad tangentem arcus.

Sint vt in ſuperiori, in Quadrante ABC.deſcriptæ Helix, & Quadratrix quarta ſecantes ſe in D. puncto per quod ex punctis C. D. tranſeant duæ rectæ ADH. CDF. quarum illa quadrantem ſecet in H. hac latus erectum in F. & diuidatur arcus BH. bifariam in Q. ſitque arcus BQ. tangens BR. & connectatur AR. ſecans FD. in O. Dico Quadrantem BC. ita ſectum eſſe in Q. vt quæ ratio Quadrantis BC. ad complementum HC. dupli BQ. eadem ſit ſinus totius AB. ad tangentem BR. Quoniam ADH. recta tranſit per punctum D. exiſtens in linea ſpirali erit vt BC. ad CH. ita BA. ad AD. Rurſus quia recta CDF. tranſit per punctum D. quartæ Quadratricis erit vt BC. ad CH. ita BA. ad AF. æquales igitur ſunt AD. AF. Quare cum in triangulis FAO. DAO. latera FA. AO. lateribus DA. AO. & anguli FAO. DAO. ſint æquales (ſumpſimus enim arcus BQ. QH. æquales) erunt anguli FOA. DOA. æquales, ideoque recti. Quare cum in triangulo rectangulo CAF. ex A. angulo recto in baſim FC. perpendicularis AO. ducta ſit erit angulus FCA. æqualis angulo FAO. Igitur cum in triangulis rectangulis CAF. ABR. æquales ſint anguli recti ad A. & B. & æquales anguli FCA. BAR. æquales item AC. AB. æqui-



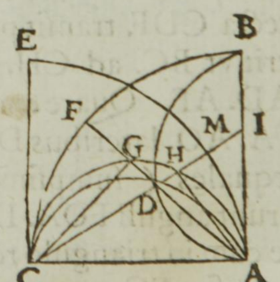
1. defin. huius.
33. huius.
9. 5.
4. 1.
8. 6.

32. & 26. 1. æquiangula, & æqualia erunt dicta triangula, vt ergo CA. id est BA. ad AF. ita AB. ad BR. sed vt BA. ad AF. ita ostensus est Quadrans BC. ad arcum HC. Vt igitur AB. ad BR. ita BC. ad HC. Quare Quadrantem ita secuimus &c. Quod faciendum fuerat.

PROBLEMA IX. PROPOS. XLI.

Ex Quadrante duos arcus inæquales auferre ita vt quæ proportio maioris arcus ad minorem, ea sit sinus recti minoris ad sinum complementi maioris.

Super eadem basi AC. centris A. C. duo Quadrantes describantur ACB. CAE. æquales secantes se in K. quorum latera erecta AB. CE. ac sit latus erectum AB. diameter spiralis ADB. cuius principium A. extremum B. basis vero CA. sit diameter alterius spiralis cuius principium C. extremum A. quæ spirales sese in puncto D. secent, & circa CA. descriptus sit semicirculus CGHA. Ducantur autem per punctum D. semidiametri AF. AM. illa secans semicirculum in G. Quadrantem BC. in F. ista secans semicirculum in H. Quadrantem EA. in M. & ducta AH. secet Quadrantem BC. in H. manifestum est cum angulus in semicirculo CGA. sit rectus CG. esse sinum rectum arcus FC. & ob eandem causam CH. esse sinum rectum arcus KC. & HA. sinum complementi. Dico esse arcum maiorem KC. ad minorem FC.



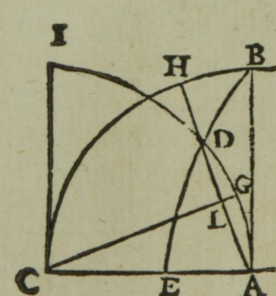
defin. 1. huius. vt est sinus rectus CG. minoris arcus ad HA. sinum complementi maioris arcus KC. Nam ex natura spiralis, cum punctum D. sit in spirali ADB. erit vt AD. ad AF. id est

AD. ad AC. ita arcus FC. ad Quadrantem CB. id eſt arcus GC. ad ſemicirculum CGA. Rurſus cum idem punctum D. ſit in voluta ADC. erit vt AC. ad CD. ita Quadrans EA. ad arcum EM. ſemicirculus CHA. ad arcum CGH. ergo ex æquali vt AD. ad D. ita arcus CG. ad arcum CH. id eſt arcus FC. ad arcum KC. & conuertendo At vero æquiangula ſunt triangula CGD, AHD. ob angulos rectos ad G. H. & æquales ad verticem D. igitur vt CD. ad DA. ita CG. ad HA. ſed vt CD. ad DA. ita KC. ad FC. ergo eſt KG. ad FC. vt CG. ad HA. ergo ex Quadrante &c. Quod erat faciendum.

PROBLEMA XI. PROPOS. XLII.

Quadrantem ita ſecare, vt quæ proportio Quadrantis ad arcum, ea ſit ſinus totius ad tangentem dupli arcus complementi.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. baſis AC. latus AB. & quarta Quadratrix in eo deſcripta BDE. centro autem C. diſtantia CA. deſcribatur alius Quadrans CAI. ſecans quartam Quadratricem in D. & ducantur rectæ ADH. ſecans Quadrantem CB. in H. & CDF. ſecans latus BA. in F. & diuidatur DA. bifariam in L. ducaturque CLG. ſecans arcum DA. bifariam in G. erit AF. tangens arcus AD. Dico eſſe vt Quadrantem AI. ad arcum IG. ita ſinum totum BA. ad tangentem arcus BA. qui duplus eſt arcus GA. complementi ipſius IG. Rurſus enim vt in ſuperiori probabimus arcum DA. eſſe



duplum ipsius HB. ideoque GA. dimidium esse æqualem ipsi HB. & reliquos arcus HC. GI. esse æquales: vt ergo BC. ad CH. ita IA. ad IG. vt autem BC. ad CH. ita BA. ad AF. ex descriptione quartæ Quadratricis, Quare vt IA. Quadrans ad arcum IG. ita BA. sinus totus, ad tangengentem BA. Ergo Quadrantem ita secuimus &c. Quod erat faciendum.

33. huius.

F I N I S.

PATAVII,

Apud Varifcum Varifci ad Puteum Pictum. 1629.

Superiorum permiffu.